信用違約交換選擇權的評價與避險

Pricing and Hedging on Credit Default Swap Options

傅瑞彬*　　吳庭斌**　　陳松男***

Jui-Pin Fu*　　**Ting-Pin Wu****　　**Son-Nan Chen*****

*傅瑞彬：靜宜大學國際企業系助理教授

***Jui-Pin Fu** is an Assistant Professor of Finance, Department of International Business, Providence University, Taichung, Taiwan.

**吳庭斌：國立臺北大學統計系助理教授

****Ting-Pin Wu** is an Assistant Professor of Finance, Department of Statistics, National Taipei University, Taipei, Taiwan.

***陳松男：國立政治大學金融系教授

*****Son-Nan Chen** is a Professor of Finance, Department of Money and Banking, National Cheng-Chi University, Taipei, Taiwan.

通訊作者：傅瑞彬

聯絡電話：**04-26328001 ext. 13012; 0928-143961**

聯絡地址：**52146** 彰化縣北斗鎮三民街 **47** 之 **2** 號

電子郵件：**jpfu@pu.edu.tw**

信用違約交換選擇權的評價與避險

Pricing and Hedging on Credit Default Swap Options

摘要

本文延伸 Schonbucher (2000, 2003, 2004)、Brigo (2004, 2005a, 2005b, 2006)、Brigo & Mercurio (2006)、Brigo & Morini (2005)、Jamshidian (2004) 與 Wu (2006) 的研究，以市場上交易之各年期信用違約交換契約 (credit default swap，簡稱 CDS) 所導出之單期(single tenor) 遠期 CDS 費率端價值做為計價資產，假設各單期信用違約交換率 (single CDS rate) 為對數常態分配下，可以將信用違約交換選擇權 (CDS options，或稱 CDSwaptions) 拆解為由各單期加總之 CDSwaptions，應用在投資銀行發行許多相同標的但不同起始日、不同到期日之一系列 CDSwaptions 時，可以具有評價簡易的優勢，吻合各期間之信用市場狀況，避免套利機會，並能運用 CDS，增進避險與管理信用風險之技術。

【關鍵字】 信用違約交換選擇權、單期信用違約交換率、信用風險

Abstract

This paper extends the research on Schonbucher (2000, 2003, 2004), Brigo (2004, 2005a, 2005b, 2006), Brigo & Mercurio (2006)、Brigo & Morini (2005), Jamshidian (2004) and Wu (2006). We use the fee leg of the single tenor forward credit default swap rate as numeraire. Under the lognormal distribution assumption on the single CDS rate, we decompose credit default swap options (CDSwaptions) into the sum of single CDS options. The result can be used by investment banks to manage credit risk when their derivative book consists of different start-date and end-date CDS options. In addition, our result shows that forward CDS can be used to hedge against the risk of CDS options. The proposed method helps improve the techniques of hedging and managing credit risk.

【Key words】 Credit Default Swap Option, Single CDS Rate, Credit Risk

壹、簡介

信用違約交換(credit default swap, 簡稱 CDS) 是提供對特定公司之債務違約的保險，特定公司稱為參考實體 (reference entity)，公司發生違約稱為信用事件 (credit event)。違約保護的買方定期支付給違約保護的賣方一個事先決定的固定年費率，直到契約終了或發生信用事件即終止支付。如果發生信用事件，違約保護的買方就有權交付賣方參照公司所發行的債券，並取得該債券的面值。在 CDS 市場建立完整後，信用市場持續發展出遠期信用違約交換 (forward CDS) 與信用違約交換選擇權 (CDS options，或簡稱 CDSwaptions)。所謂遠期 CDS 是指交易雙方同意在未來特定時點，買進 (另一方為賣出) 特定信用參照標的之信用違約交換契約。CDSwaptions 是指在選擇權到期前，買方有權可以事先約定的費率 (或稱信用價差) 買進或賣出標的遠期 CDS。如果是擁有買進的權利，我們稱之為支付選擇權 (payer CDSwaptions)，反之擁有賣出的權利者，稱之為收入選擇權 (receiver CDSwaptions)。

買進支付選擇權的投資者，主要是認為在選擇權到期時，標的遠期 CDS 契約之信用價差將會擴大，屆時可以低於市價之信用價差履約價取得遠期 CDS 契約或直接現金結算獲取利益，此類型的投資者是看空信用市場 (信用惡化)；買進收入選擇權的投資者，主要是認為在選擇權到期時，標的遠期 CDS 之信用價差將會縮小，屆時可以高於市價之信用價差履約價賣出遠期 CDS 或直接現金結算獲取利益，此類型的投資者是看多信用市場 (信用改善)；擔任支付選擇權或收入選擇權的賣方 (或發行者)，通常是投資銀行或保險公司等大型金融機構，因為發行不同到期日的選擇權且其標的之信用違約保護期間也不同，因此形成 CDSwaptions 之信用投資組合，發行者必須做好避險，以免產生極大的風險。

信用違約交換選擇權可以在信用價差變動的環境中提供多樣化的投資工具以增進收益率或提供下方保護，此信用衍生性商品吸引人的原因有以下三點 (Merrill Lynch 2006)。

第一、CDSwaptions 之非線性的報償型態可以協助投資者建立更彈性的風險對應報酬的型態。

第二、當投資者認為未來的信用市場狀況變動幅度不大時，可以賣出 CDSwaptions 來增進收益；反之若認為未來的信用市場狀況變動幅度增加時，則可以買進 CDSwaptions 來獲取報酬。

第三、在櫃檯買賣市場之信用違約交換交易越來越普遍下，將會有較好的流動性，因此以其為標的之 CDSwaptions 的避險效果也會較好，可以使得這項工具更能提供投資人交易對未來信用市場的看法，包括信用價差的大小以及價差波動度。

CDSwaptions 是下列因子的函數：標的信用價差、履約信用價差、距選擇權到期日以及價差波動度。其中，除了價差波動度外，其它皆可以從市場上觀察得到。價差波動度的估計，可以從歷史信用價差估計得到，也可以從 CDSwaptions 的市場報價求算隱含價差波動度，兩者的比較可以用來判斷 CDSwaptions 的價格是否太貴或便宜。CDSwaptions 商品在金融市場上有其存在的利基，舉例來說，如果 3M 公司的上游供應商將於一年後與 3M 公司簽訂五年期的供貨合約，為了保障未來貨款回收的安全性，想要購買明年發行之 3M 公司五年期 CDS 以取得信用保護，但是目前 (2008 年 9 月 15 日) 華爾街第四大投資銀行雷曼兄弟控

股宣佈倒閉後，信用市場大為緊縮，3M 公司五年期 CDS 依 Datastream 資料庫報價 45.9 bps 已較 2007 年底 18.2 bps 高出甚多，因此為了節省開支，但又希望規避明年信用市場的不確定性，該供應商希望向某投資銀行買進到期日一年之 CDSwaptions，標的商品為 3M 公司五年期 CDS 遠期契約。如果未來一年，信用市場緊縮的狀況逐步紓解，低於約定的履約信用價差，則該供應商只損失了買進選擇權的成本，卻可在明年直接在信用市場上買進較便宜的五年期 CDS；如果未來一年，信用市場緊縮的情況更加嚴重，高於約定的履約信用價差，則在明年可以較便宜的履約信用價差買進較貴的五年期 CDS，因此等於是買了保險，確保明年將買進的五年期信用價差的成本不高於履約信用價差。

在實務上，三個月到期進入五年期（3M-into-5Y）的歐式 CDSwaptions 是最常見且具流動性的商品，其意義是指選擇權在三個月後到期，然後交割五年期的信用違約交換契約。CDSwaptions 通常會有許多不同的履約價，因此不僅可以交易價平選擇權，也可交易價外選擇權。CDSwaptions 最重要的性質是它們可提供價差變動的保護，但選擇權到期前不保護違約風險，因此大多數的 CDSwaptions 皆可稱為違約出局（knock-out-on-default）契約，且通常不是美式選擇權，因為金融危機或信用參考實體經常在違約前會有徵兆，所以若能隨時履約，會造成 payer CDSwaptions 的買方大量履約，使得發行美式 CDSwaptions 的投資銀行在避險技術上極為困難。(Felsenheimer, Gisdakis, & Zaiser 2006)。

有關信用衍生商品的研究，以前多集中在於評價其價值，較少關注避險的議題。舉例來說，在縮減式（reduced form）模型中，早期信用衍生性商品的評價模型如 Kijima & Komoribayashi（1998），提出歐式信用價差賣權的評價公式如下。

$$\Pi_i = P(0,t)\sum_{j=1}^{k+1}\tilde{q}_{ij}(0,t)\left\{K+\frac{1}{T-t}\log\left[1-(1-\delta)\tilde{q}_{j,k+1}(t,T)\right]\right\}^{+} \tag{1}$$

其中，Π_i 代表第 i 等級信用標的之歐式信用價差賣權的價值，$P(0,t)$ 是在時點 0 到期日 t 之無風險債券的價值，$\tilde{q}_{ij}(0,t)$ 是從時點 0 至賣權到期日 t，信用等級 i 債券移動變成 j 級債券之風險調整移動機率，$\tilde{q}_{j,k+1}(t,T)$ 是從時點 t 至債券到期日 T，信用等級 j 債券移動變成倒閉之風險調整移動機率。我們觀察式 (1)，可知此歐式信用價差賣權評價公式使用無風險債券 $P(0,t)$，而非使用可違約標的資產，所以在此模型下評價會有避險的問題。

為了改善模型避險的問題，Schonbucher（2000, 2003, 2004）採取建立有違約風險下的 LIBOR 市場模型（LIBOR market model with default risk），在避險問題的處理上，以遠期 CDS 之費率端（fee leg）之價值做為計價單位（numeraire），經測度轉換後，可以建立易於避險的評價公式，其中 payer CDSwaptions 評價公式可表示如下。

$$V^{CDSO} = V^{fee}(t)E^{Q(V^{fee})}\left[\left(S_T-K\right)^{+}\middle|F_t\right] = 1_{\{\tau>t\}}V^{fee}(t)\left[S_tN(d_1)-KN(d_2)\right] \tag{2}$$

其中，$d_{1,2}=\dfrac{\ln\left(S_t/K\right)\pm\frac{1}{2}v_{t,T}^2}{v_{t,T}}$。$V^{CDSO}$ 代表信用標的之信用違約交換支付選擇權的價值，$V^{fee}(t)$ 是在時點 t 之遠期 CDS 1 bp (基點)信用保護費率的價值，S_t 與 K 分別是信用違約交換率的目前報價與履約價，$v_{t,T}^2$ 是從時點 t 至 T 之信用違約交換率的總變異數，若波動度 σ_0 為常數，則 $v_{t,T}^2=\sigma_0^2(T-t)$，選擇權到期日為 T。

我們觀察式 (2)，可知計價單位$V^{fee}(t)$是可交易資產，因此可以進行避險。

雖然在 Schonbucher (2000, 2003, 2004) 的論文中，運用 CDS 費率端做為計價單位，已導出信用違約交換選擇權的評價公式，但其缺點為 CDSwaptions 到期前，若發生違約，則回收金額為零，這引申為在選擇權到期前，該測度是以發生違約機率為零來處理，稱為存活測度 (survival measure)，其為絕對連續測度 (absolutely continuous measure)，並非均等測度。因此 Schonbucher (2000, 2003, 2004) 之方法是在非均等測度下評價 CDSwaptions，若假設信用違約交換率為對數常態，則可以依 Black (1976) 期貨選擇權公式導出 CDSwaptions 評價公式，其優點在於可以直接使用遠期 CDS 進行避險，簡單明瞭。

在 Schonbucher (2000) 的論文提出後，Jamshidian (2004) 認為可以將絕對連續測度改良為均等測度，以建立一般化的評價模型，其方法是在費率端建立一個均等測度，並納入信用交換市場動態來計算，其 CDSwaptions 評價公式如下。

$$\begin{aligned} C_t &= \mathrm{B}_t E^{\hat{\mathrm{B}}}\left[\left(S_T - K\right)^+ \middle| \mathrm{H}_t\right] \\ &= \mathrm{B}_t\left(S_t N\left(\frac{\log(S_t/K)}{v_{t,T}} + \frac{v_{t,T}}{2}\right) - KN\left(\frac{\log(S_t/K)}{v_{t,T}} - \frac{v_{t,T}}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

其中C_t代表 payer CDSwaptions 的價值，B_t稱為T期仍存活之預存計價單位 (prenumeraire)，$\mathrm{B}_t S_t = A_t$稱為T期仍存活之債權。其實，Jamshidian (2004) 的與 Schonbucher (2000, 2003, 2004) 的 CDSwaptions 評價公式在外觀上極為相似，差別在於絕對連續測度與均等測度的不同，亦即建立模型的方法不同，但是都可以得到相同的評價結果。

而 Brigo (2004, 2005a, 2005b, 2006) 與 Brigo & Morini (2005) 則是採取建立類似 LIBOR 市場模型評價利率交換選擇權的方法，將多期信用違約交換率轉換為各單期違約交換率 (single CDS rate) 之加權平均，以可違約浮動利率票券 (defaultable floating rate notes，簡稱 DFRN) 為計價單位，假設單期信用違約交換率為對數常態，依 Black (1976) 期貨選擇權評價公式導出 CDSwaptions 評價公式。他們的優點在於採用的計價單位在所有情境下都為正數，避免 CDSwaptions 到期前發生違約，使得計價單位為零的問題，其 CDSwaptions 評價公式如下。

$$\begin{aligned} \Pi_{CDSC}(t,K) &= 1_{\{\tau > T_a\}} D(t,T_a)\left[\sum_{i=a+1}^{b} \alpha_i \bar{P}(T_a,T_i)\right]\left(R_{a,b}(T_a) - K\right)^+ \\ &= 1_{\{\tau > T_a\}} C_{a,b}(t)\left[R_{a,b}(t)N(d_1) - KN(d_2)\right] \end{aligned} \tag{4}$$

其中$\Pi_{CDSC}(t,K)$代表 payer CDSwaptions 的價值，$C_{a,b}(t) = \sum_{i=a+1}^{b} \alpha_i \bar{P}(T_a,T_i)$表示稱為 DFRN 投資組合一個基本點的現值 (defaultable present value per basis point，簡稱 DPVBP)，或稱為年金 (annuity)，$\bar{P}(T_a,T_i)$是在時點t交易T_a至T_i期間的零息債券。Brigo (2004, 2005a, 2005b, 2006) 與 Brigo & Morini (2005) 的方法雖然解決計價單位可能為零的問題，但是其缺點是計價單位 DFRN，並非完全可交易資產，因此在避險時會產生困難。

為了更精進信用衍生性商品之評價與避險技術，本文延伸 Schonbucher (2000, 2003, 2004)、Brigo (2004, 2005a, 2005b, 2006)、Brigo & Mercurio (2006)、Brigo & Morini (2005)、Jamshidian (2004) 與 Wu (2006) 的研究，以

市場上交易之各年期 CDS 所導出各單期（single tenor）CDS 費率端價值為計價資產，將信用風險市場之信用曲線、各期間違約機率及回收率納入隱含遠期信用違約交換率中，以吻合各單一期間信用市場狀況，並能運用遠期 CDS 進行避險，避免產生套利機會，有助於投資銀行提升避險與風險管理之技術。

本文的介紹架構如下：第貳節是模型介紹；第叁節實證結果；第肆節說明模型應用的價值；第伍節對本研究的結果加以結論。

貳、模型介紹

雖然前述多位學者的理論，已經可以求算特定期間 CDSwaptions 之價值。然而，若投資銀行發行相同標的，但期間不同的信用違約交換選擇權，其中有些是 CDS 支付選擇權，部分是 CDS 收入選擇權，當市場上同時存在這些商品時，不易同時進行避險，且發行這些商品的投資銀行也不易管理信用投資組合風險。此時，採用 Schonbucher (2000, 2003, 2004) 與 Jamshidian (2004) 的評價方法在信用投資組合的避險與風險管理上會產生困擾，主要的原因在於這些商品的評價期間是重疊的且部份的避險部位方向是相反的，而 Hull & White (2003) 的論文延續 Jamshidian (2004)的方法，亦存在相同之評價期間重疊的問題。因此，本文目的在解決評價期間重疊及避險的問題，本文的模型是整合 Schonbucher (2000, 2003, 2004)、Brigo (2004, 2005a, 2005b, 2006)、Brigo & Mercurio (2006)、Brigo & Morini (2005)、Jamshidian (2004) 與 Wu (2006) 的理論，建立新的 CDSwaptions 評價模型，不但能同時評價 CDSwaptions 信用投資組合並能適當的進行避險。在模型設計上，由於 Schonbucher (2000, 2003, 2004) 的方法可由 Jamshidian (2004) 所取代，因此我們依循 Jamshidian (2004) 的設定，但吸收 Brigo (2004, 2005a, 2005b, 2006) 、Brigo & Morini (2005) 與 Wu (2006) 的優點，將 Jamshidian (2004) 的模型修改為以市場上交易之各年期 CDS 所導出單期 CDS 費率端價值為計價資產，在違約模型的設定上則延續 Jamshidian (2004) 使用 Elliott, Jeanblanc, & Yor (2000) 以及 Jeanblanc & Rutkowski (2000) 所提出之子濾網法(subfiltration approach)，將子濾網視為一個大的資訊子集，給定子濾網知識下的條件存活機率，以解釋無法正確預測違約之發生。

因為 Hull & White (2003) 結合 Schonbucher (2000) 與 Jamshidian (2004) 及其本身的研究成果，並進行模型的實證，資料與結果正可提供我們進行比較分析，因此我們在實證時將以 Hull & White (2003)的資料與結果進行討論。而 Brigo (2005a)將遠期 CDS 視為一系列單期遠期 CDS 的方法，我們採用來擴展 Schonbucher (2000, 2003, 2004) 與 Jamshidian (2004) 的模型，其中與 Brigo (2005a)模型不同的是其計價單位是 DFRN，我們則是採用 Wu (2006) 分息零息風險債券 (C-strip risky zero coupon bonds) 為計價單位。因此，我們修改 Jamshidian (2004) 的設定，將多期 CDS 對數常態動態過程改成各單期 CDS 對數常態動態過程，修正模型如下：

延續Jamshidian (2004) 的設定，假設違約評價模型 (default valuation model) 為 $\Omega = (\Psi, \tau, \mathrm{H}_t)$，其中 Ψ 是評價模型，τ 是 Φ_t -stopping time，其意義為 $\{\tau > t\} \in \Phi_t$，表示違約可能性，濾網 Φ_t 代表在時點 t 所有資訊的演進 (evolution)，H_t 是 Φ_t 子濾網，滿足一般的假設及 $\mathrm{H}_0 = \Phi_0$，H_t 可視為是部分資訊，包括除了違約本身以外的所有資訊，例如利率、經濟、公司財務基本資訊及

其他影響公司健全的因子等。違約時間τ之條件存活機率α_t為$\alpha_t = E\left[\tau > t \middle| \mathrm{H}_t\right]$。

從T_a期開始之 CDS 是指未來T_a期開始之費率端與違約保護端(default protection)的交換，這兩端都是現金流量組合。$\Gamma = (T_{a+1},\ldots,T_b)$代表支付日期，且$0 < T_a < T_{a+1} < \ldots < T_b$。$\delta_n \in \mathrm{H}_{T_n}$是有界的，$a+1 \le n \le b$，$B_T^{\delta_\Gamma} = 1_{\tau > T}\,\delta$是任意$T \le T_a$之$T$時點存活債權，且$B_T^{\delta_\Gamma} := \sum_{n=a+1}^{b} B_T^{T_n,\delta_n} = \sum_{n=a+1}^{b}\left(1_{\tau > T_n}\,\delta_n + 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n}\,\delta_n^*\right)$亦代表為存活年金之現金流量(survival annuity stream)，其中違約時點為$T_{n-1} < \tau \le T_n$，則依比例支付δ_n^*，為簡化計算，δ_n^*依照 JPMorgan (2001) 之建議，以$\frac{1}{2}\delta_n$作為近似值，而$B_T^{T_n,\delta_n} = 1_{\tau > T_n}\,\delta_n + 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n}\,\delta_n^*$。假設$\delta_n = T_n - T_{n-1}$，CDS 起始日$T_a < T_{a+1}$，債權$KB_T^{\delta_\Gamma}$則代表 CDS 在起始點$T_a$之費率端，$K$ > 0 代表年度化費率。$L_n \in \mathrm{H}_{T_{n-1}}$是有界的，$a+1 \le n \le b$，$A_T^{T_a,L_\Gamma}$是任意$T \le T_a$之$T$時點存活債權，且$A_T^{T_a,L_\Gamma} := \sum_{n=a+1}^{b} A_T^{T_{n-1},T_n,L_n} = \sum_{n=a+1}^{b} 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n}\,L_n$亦代表從$T_a$到$T_b$之遠期 CDS 保護端現金流量，其中$A_T^{T_{n-1},T_n,L_n} = 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n}\,L_n$，如果在$T_{n-1}$與$T_n$之間違約，則在時點$T_n$應由賣出保護者(protection seller)支付發生的損失$L_n = FA(1 - REC_n)$，其中FA代表 CDS 標的名目金額，REC_n代表標的在T_{n-1}與T_n之間違約後確定的回收比率。

在無套利機會下，多期 CDS 費率端價值必須等於保護端價值，因此可得：

$$S(t,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b} V_t^{\beta}(B_T^{T_n,\delta_n})\right) = \sum_{n=a+1}^{b} V_t^{\beta}(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n}) \tag{5}$$

其中，$V_t^{\beta}(B_T^{T_n,\delta_n})$代表在$T_n$時點 CDS 1 basis point 信用費率的價值，$V_t^{\beta}(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n})$代表在$T_{n-1}$到$T_n$之間提供保護之價值。將$B_T^{T_n,\delta_n} = 1_{\tau > T_n}\,\delta_n + 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n}\,\delta_n^*$與$A_T^{T_{n-1},T_n,L_n} = 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n}\,L_n$代入式 (5) 可得：

$$\begin{aligned} &S(t,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b} E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau > T_n}\,\delta_n + 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n}\,\delta_n^*\right)\middle| H_t\right)\right) \\ &= \sum_{n=a+1}^{b} L_n E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n} 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n} \middle| H_t\right) \end{aligned} \tag{6}$$

將式 (6) 左項轉換成單期 CDS rate 加總 (參見附錄三),可得式 (7) 如下:

$$S(t,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b} \bar{B}_n(t)\right) = \sum_{n=a+1}^{b} S(t,T_{n-1},T_n)\bar{B}_n(t) \tag{7}$$

其中，$\bar{B}_n(t) := \delta_n P(t,T_n) D_n(t)$，$0 \le n \le N$，$D_n(t) := E^n\left(\left(1_{\tau > T_n} + 1_{T_{n-1} < \tau \le T_n}\,\Delta_n^*\right)\middle| H_t\right)$，$\Delta_n^* = \delta_n^* / \delta_n$，$P(t,T_n)$為在時點$t$到期日$T_n$之無風險零息債券；$\bar{B}_n(t)$在 Wu (2006) 的論文中，稱為分息零息風險債券價值，是可交易資產。由附錄一，可得單期 CDS rate 近似值$\bar{S}_n(t)$如下：

$$\bar{S}_n(t) = \frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{\bar{B}_{n-1}(t)}{\bar{B}_n(t)\left(1+\delta_n F_n(t)\right)} - 1\right) \approx \frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{\bar{B}_{n-1}(t)}{\bar{B}_n(t)\left(1+\delta_n F_n(0)\right)} - 1\right) =: \tilde{S}_n(t) \tag{8}$$

其中，$\tilde{S}_n(t)$ 是單期遠期 CDS rate 近似值 $\overline{S}_n(t)$ 將遠期 LIBOR 利率 $F_n(t)$ 凍結在 $F_n(0)$ 的近似值。因此，我們可以將多期 CDS 轉換為各單期 CDS 的加總，並且透過適當的假設，可將多期 CDSwaptions 轉換為各單期 CDSwaptions 的加總，其步驟如下：

為了運用Black (1976) 期權公式來計算CDS 選擇權，我們假設H_t是布朗濾網(Brownian filtration)，所有 $\left(\mathrm{H}_t, P^{\overline{B}_n}\right)$-平賭是連續的，其中 $n = a+1,\cdots,b$ ，且存在一系列單期遠期CDS rate $\tilde{S}_n(t) = \frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{\overline{B}_{n-1}(t)}{\overline{B}_n(t)\left(1+\delta_n F_n(0)\right)} - 1\right)$，並假設 $\tilde{S}_n(t)$ 是連續的。其中，$\tilde{A}_T^{T_a,L_T}$ 是任意 $T \le T_a$ 之T時點存活債權，且 $\tilde{A}_t^{T_{n-1},T_n,L_n}$ 是預存測度，使得 $\tilde{S}_n(t) > 0$ 幾乎確實成立 (almost surely)。如果 $\log \tilde{S}_n(t)$ 在濾網H_t上，具有確定平方變異，且 $\tilde{S}_n(t)$ 是連續 $P^{\overline{B}_n}$ -平賭，則 $\log \tilde{S}_n(t)$ 會依循 $P^{\overline{B}_n}$ -高斯過程(Gaussian process)，亦即 $\log \tilde{S}_n(t)$ 是 $P^{\overline{B}_n}$ -對數常態分配。在單期CDS期間 (T_{n-1}, T_n) 的測度下，其動態過程可表示如下。

$d\tilde{S}_n(t) = \sigma_n(t)\tilde{S}_n(t)dW_n^n(t)$，對所有 n 都成立。 (9)

從財務經濟直覺(financial economic intuition)的角度來看，我們所提出的模型以一系列單期 CDS rate 為對數常態分配來代替多期 CDS rate 為對數常態的設定，其目的在避免評價期間重疊的問題。因為在評價期間重疊的情形下，Hull & White (2003) 採取不管任何期間之 CDS rate 都是對數常態分配，來評價許多不同起始日不同到期日之多期信用違約交換選擇權，在個別評價下，問題較小，但是若形成投資組合，則內部模型不一致的問題就會變的嚴重，類似這樣的問題就如同利率交換選擇權 (interest rate swaptions) 在 Brace, Gatarek, & Musiela (1997) LIBOR 市場模型 (簡稱 LMM) 之討論，在連續不斷的時間區間下的遠期利率之間是互相有關的，並且只在同一個無套利測度下，無法全部是對數常態分配。同理，在本文中單期 CDS rate 的角色相當於 LMM 的 Libor 利率的角色，在同一個無套利測度下，無法全部是對數常態分配，所以市場實務上，採用 Jamshidian (2004) 與 Hull & White (2003) CDSwaptions 評價公式，在理論上是有矛盾的。而我們的模型是 Jamshidian (2004) 模型的一般化模型，可以克服此問題，就如 LMM 解決利率交換選擇權評價之內部不一致的問題。

結合上述條件及式 (7)、(8) 與 (9) 及附錄二 (A.5)，我們可以運用 Black (1976) 期權公式來計算 CDS 選擇權，在時點 T 到期之 T_a 至 T_b CDSwaptions 近似值 $\tilde{C}_t$ 如下：

$$\tilde{C}_t = \sum_{n=a+1}^{b} \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\overline{B}_n}} \overline{B}_n(t) E^{\overline{B}_n}\left[\left(\tilde{S}_n(T) - K\right)1_D \middle| \mathrm{H}_t\right] \tag{10}$$

其中，1_D 代表集合 D 的指標函數 (indicator function)，$D := \left\{\tilde{S}(T,T_a,T_b) - K > 0\right\}$，$\tilde{S}(T,T_a,T_b)$ 代表在時點 T 由 T_a 至 T_b 期間的 CDS rate。由附錄二 (A.7) 與 (A.8)，式 (10) 之 $\tilde{C}_t$ 可得如下：

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_t &= \sum_{n=a+1}^{b} \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}} \bar{B}_n(t) E^{\bar{B}_n}\left[\left(\tilde{S}_n(T,U)-K\right)1_{\{U^n>U^*+\upsilon_n\}}\middle| \mathrm{H}_t\right] \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} B_n(t) E^{\bar{B}_n}\left[\left(\tilde{S}_n(t)\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mho_n^2+\mho_n U^n\right)-K\right)1_{\{U^n>U^*+\upsilon_n\}}\middle| \mathrm{H}_t\right] \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} B_n(t) E^{\bar{B}_n}\left[\left(\tilde{S}_n(t)\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mho_n^2+\mho_n U^n\right)-K_n^*+K_n^*-K\right)1_{\{\tilde{S}_n(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\mho_n^2+\mho_n U^n\right)>K_n^*\}}\middle| \mathrm{H}_t\right] \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} B_n(t) E^{\bar{B}_n}\left[\left(\tilde{S}_n(t)\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mho_n^2+\mho_n U^n\right)-K_n^*\right)1_{\{\tilde{S}_n(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\mho_n^2+\mho_n U^n\right)>K_n^*\}}\middle| \mathrm{H}_t\right] \\
&+\sum_{n=a+1}^{b}\left(K_n^*-K\right) B_n(t) E^{\bar{B}_n}\left[1_{\{\tilde{S}_n(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\mho_n^2+\mho_n U^n\right)>K_n^*\}}\middle| \mathrm{H}_t\right] \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} B_n(t)\left(\tilde{S}_n(t) N\left(d_1(\tilde{S}_n(t),K_n^*,\mho_n)\right)-K_n^* N\left(d_2(\tilde{S}_n(t),K_n^*,\mho_n)\right)\right) \\
&+\sum_{n=a+1}^{b} B_n(t)\left(K_n^*-K\right) N\left(d_2(\tilde{S}_n(t),K_n^*,\mho_n)\right) \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} B_n(t)\left(\tilde{S}_n(t) N(d_1^n)-K N(d_2^n)\right)
\end{aligned}
$$

因此，近似 CDS 選擇權價格 $\tilde{C}_t$ 如下：

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_t &= \sum_{n=a+1}^{b} B_n(t)\left(\tilde{S}_n(t) N(d_1^n)-K N(d_2^n)\right) \\
&= \sum_{n=a+1}^{b}\left(\frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{B_{n-1}(t)}{\left(1+\delta_n F_n(0)\right)}-B_n(t)\right) N(d_1^n)-K B_n(t) N(d_2^n)\right)
\end{aligned} \tag{11}
$$

其中，$d_{1,2}^n=\left(\ln(\tilde{S}_n(t)/K_n^*)\pm\frac{1}{2}\mho_n^2\right)\big/\mho_n$，$t \le T$，$\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}}}\bar{B}_n(t)=B_n(t)$，$\bar{B}_n(t)=V_t^{\bar{B}_n}(B_T^{T_n,\delta_n})$，$K_n^*=\tilde{S}_n(T,U^*)$。

我們將多期 CDS 選擇權轉換為單期 CDS 選擇權之加總，其目的在避免僅使用某一期間之報價，以免因流動性等因素，影響評價之準確性，納入各期間 CDS rate，可以轉成各期 CDS rate 比重，降低個別因素之影響，且可以完整觀察信用市場各期違約交換率之情況，有助於避險與風險管理的參考。

當假設 CDS rate 與其波動度都是水平時，本模型之 CDS 選擇權封閉解評價模型將會縮減為 Jamshidian (2004) 與 Hull & White (2003) 之 CDS 選擇權評價公式，證明請參見附錄三。

叁、實證結果

我們提出的單期 CDS 模型為 $\tilde{S}_n(t)=\dfrac{L_n}{\delta_n}\left(\dfrac{\bar{B}_{n-1}(t)}{\bar{B}_n(t)\left(1+\delta_n F_n(0)\right)}-1\right)$。

$$
\begin{aligned}
d\tilde{S}_n(t) &= \sigma_n(t)\tilde{S}_n(t)dW_n^n(t)=\sigma_n(t)\tilde{S}_n(t)\left(dW_n^m(t)+\sum_{k=m+1}^{n}\rho_{n,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k}{\tilde{S}_k+\left(L_k/\delta_k\right)}dt\right) \\
&= \sigma_n(t)\tilde{S}_n(t)\left(\mu_n^m(t)dt+dW_n^m(t)\right)
\end{aligned}
$$

$$\tilde{C}_t = \sum_{n=a+1}^{b} B_n(t)\left(\tilde{S}_n(t)N(d_1^n) - KN(d_2^n)\right)$$
$$= \sum_{n=a+1}^{b}\left(\frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{B_{n-1}(t)}{\left(1+\delta_n F_n(0)\right)} - B_n(t)\right)N(d_1^n) - KB_n(t)N(d_2^n)\right)$$

Brigo (2005a) 與 Brigo & Mercurio (2006) 提出的單期 CDS rate 模型如下：

$$\tilde{R}_n(t) = \frac{L_{GD}}{\delta_n}\left(\frac{\bar{P}(t,T_{n-1})}{\bar{P}(t,T_n)\left(1+\delta_n F_n(0)\right)} - 1\right)$$

其中，$\bar{P}(t,T_n) = \left(E\left[D(t,T_n)1_{\{\tau>T_n\}}\right]\right) \Big/ Q(\tau > t | H_t)$。

$$d\tilde{R}_n(t) = \sigma_n(t)\tilde{R}_n(t)dZ_n^n(t) = \sigma_n(t)\tilde{R}_n(t)\left(dZ_n^m(t) + \sum_{k=m+1}^{n}\rho_{n,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{R}_k}{\tilde{R}_k + \left(L_{GD}/\delta_k\right)}dt\right)$$
$$= \tilde{R}_n(t)\left(\tilde{u}_n^m(t)dt + \sigma_n(t)dZ_n^m(t)\right)$$

因為 Brigo (2005a) 與 Brigo & Mercurio (2006) 並未推導出近似封閉解，所以其方法將僅採取蒙地卡羅模擬法 (Monte Carlo simulation) 評價。

Hull & White (2003) p.44 採用 Jamshidian (2004) 方法之封閉解如下：

$$\tilde{C}_t = \left(\sum_{n=a+1}^{b}\delta_n E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n} + 1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\middle| H_t\right)\right)\left(S(t,T_a,T_b)N(d_1) - KN(d_2)\right)$$
$$= \left(\sum_{n=a+1}^{b}E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}\delta_n + 1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\middle| H_t\right)\right)\left(S(t,T_a,T_b)N(d_1) - KN(d_2)\right)$$

其中，$\sum_{n=a+1}^{b}E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}\delta_n + 1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\middle| H_t\right)$ 代表存活年金現金流量的現值，上式之 Hull & White (2003) 的符號已調整與本文一致。

因此，我們可以對 $\tilde{R}_n(t)$ 與 $\tilde{S}_n(t)$ 做蒙地卡羅模擬，再分別轉換為原有之 $\tilde{R}_n(t)$ 與 $\tilde{S}_n(t)$，以計算 CDS 選擇權的價值，並將其與近似封閉解比較，來觀察模型的優劣。為了進行蒙地卡羅模擬步驟，我們利用市場上可取得之多期 CDS rate，且為了方便比較，我們使用 Hull & White (2003) 的資料與結果，運用 Hull & White (2003) 之即期與遠期 CDS rate 之關係與違約機率密度資料，在無套利假設下，依 Hull & White (2000) 之方法以拔靴法 (bootstraping) 求出單期遠期 CDS rate 之期初值，並假設其各期間的波動度與相關係數，我們採取兩種情形，第一種採用 Hull & White (2003) 假設波動度 40%，並設定相關係數為 1；第二種採取採用 Jackel & Rebonato (2000) 參數化波動度與相關係數設定。參數設定後，我們就可以進行蒙地卡羅模擬，得出未來時點 $T = T_a$ 之各違約交換期可能的單期 CDS ($\tilde{S}_{a+1}(T_a), \tilde{S}_{a+2}(T_a), ..., \tilde{S}_b(T_a)$)，並據以計算多期 CDS 選擇權的價值。我們以起始日一年後、三年後、五年後，信用違約交換一年期、二年期、三年期、五年期之 CDS 選擇權為例，求算各期間 CDSwaptions 的價值，以期與本文之近似封閉解

及 Hull & White (2003) 封閉解比較。

因為我們的論文與 Brigo (2005a) 與 Brigo & Mercurio (2006) 都有採取近似值，所以在引用 Hull & White (2003) 的資料時，須考慮調整項 $ADJ1(T_{n-1},T_n)$ 與 $ADJ2(T_{n-1},T_n)$ 。

單期之遠期 CDS rate 原始值 $S_n(t)=R_n(t)$ 及其調整項如下。

$$S_n(t)=L_n E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\left|H_t\right.\right)\Big/E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}\delta_n+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\left|H_t\right.\right)$$

$$=\frac{L_n}{\delta_n}\frac{E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(\left(1_{\tau>T_{n-1}}+1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\Delta_{n-1}^*\right)-\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)-\tilde{\Delta}(n-1,n)\right)\left|H_t\right.\right)}{E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\left|H_t\right.\right)}$$

$$=\tilde{S}_n(t)+\frac{L_n}{\delta_n}\frac{E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(-\tilde{\Delta}(n-1,n)\right)\left|H_t\right.\right)}{D_n(t)}$$

$$=\tilde{S}_n(t)+\frac{L_nP(t,T_n)}{\delta_n\bar{B}_n(t)}E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*-1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\delta_{n-1}^*\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)\left|H_t\right.\right)$$

$$=\tilde{S}_n(t)+ADJ1(T_{n-1},T_n)$$

$$R_n(t)=L_{GD}E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\left|H_t\right.\right)\Big/E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}\delta_n+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\left|H_t\right.\right)$$

$$=\frac{L_{GD}}{\delta_n}\frac{\bar{P}(t,T_{n-1})\left(P(t,T_n)/P(t,T_{n-1})\right)-\bar{P}(t,T_n)}{\bar{P}(t,T_n)+E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\left|H_t\right.\right)}$$

$$=\frac{L_{GD}}{\delta_n}\left(\frac{\bar{P}(t,T_{n-1})\left(P(t,T_n)/P(t,T_{n-1})\right)}{\bar{P}(t,T_n)}-1\right)\left(\bar{P}(t,T_n)\Big/\left(\bar{P}(t,T_n)+E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\left|H_t\right.\right)\right)\right)$$

$$=\tilde{R}_n(t)\left(\bar{P}(t,T_n)\Big/\left(\bar{P}(t,T_n)+E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\left|H_t\right.\right)\right)\right)$$

$$=\tilde{R}_n(t)\left(1-\frac{E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\left|H_t\right.\right)}{\bar{B}_n(t)}\right)$$

$$=\tilde{R}_n(t)\left(ADJ2(T_{n-1},T_n)\right)$$

因此，在採取拔靴法 (bootstraping) 求出單期 CDS rate 期初值 $S_n(t)=R_n(t)$ 後，我們必須將其轉換為 $\tilde{S}_n(t)$ 與 $\tilde{R}_n(t)$ ，來進行蒙地卡羅模擬，然後再將各個可能到期值 $\tilde{S}_n(T)$ 與 $\tilde{R}_n(T)$ 再轉換回原來之 CDS rate 期末值 $S_n(T)$ 與 $R_n(T)$ 。據此，我們可以在相同的比較基礎上，計算 CDS 選擇權的價值，進而討論模型之優缺

點。

Hull & White (2003) 的原始結果如表 1。

表 1　Hull & White (2003) 的原始結果

Hull & White (2003) (*sigma*=0.4，*rho*=1)

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)			
選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	9.07	18.83	30.91	54.49
3	19.09	37.66	59.73	99.52
5	28.44	55.97	76.09	122.96

為配合求出我們的單期遠期 CDS，在滿足即期與遠期 CDS 無套利設定下，我們微調 Hull & White (2003) 的結果如表 2。

表 2 經微調之 Hull & White (2003)

Hull & White (2003) (微調，*sigma*=0.4，*rho*=1)

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)			
選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	8.92	18.54	30.54	53.72
3	18.84	37.20	59.04	98.57
5	28.18	55.51	75.57	122.25

依我們模型所導出之單期遠期 CDS，進行 Monte Carlo 的結果如表 3。

表 3　我們的模型之 Monte Carlo

(ADJ1，*sigma*=0.4，*rho*=1)

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)			
選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	7.37 (0.14)	20.70 (0.41)	37.85 (0.77)	69.86 (1.38)
3	21.07 (0.47)	43.73 (0.97)	69.79 (1.61)	115.71 (2.66)
5	31.85 (0.83)	62.11 (1.63)	88.76 (2.41)	142.17 (3.73)

註：( )內為標準誤，模擬的次數為 10,000 次。

使用 Brigo (2005a) 模型之單期遠期 CDS ，進行 Monte Carlo 的結果如表 4。

表 4　Brigo (2005a) 模型之 Monte Carlo

(ADJ2，*sigma*=0.4，*rho*=1)

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)

選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	8.69 (0.16)	20.02 (0.39)	35.28 (0.71)	63.78 (1.25)
3	18.92 (0.42)	38.99 (0.86)	62.76 (1.44)	104.48 (2.40)
5	29.10 (0.76)	57.92 (1.52)	80.52 (2.19)	142.17 (3.34)

註：( )內為標準誤，模擬的次數為 10,000 次。

依我們的模型所導出之單期遠期 CDS，得到封閉解模型的結果如表 5。

表 5　我們的封閉解模型(ADJ1，*sigma*=0.4，*rho*=1)

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)			
選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	7.55	19.09	32.82	59.06
3	20.84	41.63	65.44	108.58
5	30.60	59.02	82.88	135.96

註：得出封閉解後，經蒙地卡羅控制變異(調整與未調整 ADJ1)處理，得出調整後封閉解。

依 Brace, Dun & Barton (2001)的簡易封閉解模型應用在遠期 CDS，並採取 Jackel & Rebonato (2000)之參數化波動度與相關係數設定，得到簡易近似封閉解模型的結果如表 6。

表 6　Brace, Dun & Barton (2001) 的簡易近似封閉解模型

$$sigma(T,t)=\gamma_1[\left(\exp(-\gamma_2(T-t)\right)\left(\gamma_4+\gamma_3(T-t)\right)+\gamma_5]$$

$$rho(T_j,T_k)=\exp\left(-\beta\left|T_j-T_k\right|\right)$$

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)			
選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	12.98	26.01	33.26	54.29
3	24.97	45.85	67.41	102.01
5	34.14	63.25	82.29	122.40

註 1：γ_1 = 2.6005，γ_2 = 1.5，γ_3 = 0.5，γ_4 = -0.05，γ_5 = 0.15。

註 2：β = 0.1。

註 3： 參數與 Jackel & Rebonato (2000)不同，是為了將表六模型之交換起始日暨選擇權到期日=5 年，違約交換期間=5 年，所得之選擇權價值=122.40 bps 與表 1、表 2 選擇權價值(bps)122.96、122.25 bps 大致相同，視為校準值，以作為表 7 以後，代替 Hull & White (2003) 進行比較時的對照組，因為 Hull & White (2003) 無法放寬波動度與相關係數之參數設定。

依我們模型所導出之單期遠期 CDS，進行 Monte Carlo 的結果如表 7。

表 7　Monte Carlo (ADJ1，parametric *sigma* & *rho*)

$$sigma(T,t)=\gamma_1[\left(\exp(-\gamma_2(T-t)\right)\left(\gamma_4+\gamma_3(T-t)\right)+\gamma_5]$$
$$rho(T_j,T_k)=\exp\left(-\beta\left|T_j-T_k\right|\right)$$

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)			
選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	11.86 (0.28)	30.75 (0.73)	51.60 (1.20)	83.33 (1.75)
3	28.78 (0.80)	53.10 (1.42)	80.78 (2.03)	127.86 (3.11)
5	38.31 (1.14)	73.12 (2.07)	97.09 (2.91)	152.40 (4.32)

註 1：( )內為標準誤，模擬的次數為 10,000 次。

註 2：γ_1 = 2.6005，γ_2 = 1.5，γ_3 = 0.5，γ_4 = -0.05，γ_5 = 0.15。

註 3：β = 0.1。

我們使用 Brigo (2005a)模型之單期遠期 CDS，進行 Monte Carlo 的結果如表 8。

表 8　Brigo (2005a) 模型之 Monte Carlo
(ADJ2，parametric *sigma* & *rho*)

$$sigma(T,t)=\gamma_1[\left(\exp(-\gamma_2(T-t)\right)\left(\gamma_4+\gamma_3(T-t)\right)+\gamma_5]$$
$$rho(T_j,T_k)=\exp\left(-\beta\left|T_j-T_k\right|\right)$$

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)			
選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	14.01 (0.33)	30.01 (0.69)	48.36 (1.10)	76.59 (1.60)
3	25.78 (0.72)	47.24 (1.26)	72.50 (1.82)	115.28 (2.80)
5	34.97 (1.04)	68.13 (1.93)	88.25 (2.65)	136.42 (3.89)

註 1：( )內為標準誤，模擬的次數為 10,000 次。

註 2：γ_1 = 2.6005，γ_2 = 1.5，γ_3 = 0.5，γ_4 = -0.05，γ_5 = 0.15。

註 3：β = 0.1。

依我們的模型所導出之單期遠期 CDS，得到封閉解模型的結果如表 9。

表 9　我們的封閉解模型(ADJ1，parametric *sigma* & *rho*)

$$sigma(T,t)=\gamma_1[\left(\exp(-\gamma_2(T-t)\right)\left(\gamma_4+\gamma_3(T-t)\right)+\gamma_5]$$
$$rho(T_j,T_k)=\exp\left(-\beta\left|T_j-T_k\right|\right)$$

交換起始日暨選擇權到期日 (年)	違約交換期間 (年)			
選擇權價值 (bps)	1	2	3	5
1	10.75	27.38	43.30	69.78

3	27.77	52.45	77.70	120.69
5	37.08	68.94	93.72	146.12

註 1：得出封閉解後，經蒙地卡羅控制變異(調整與未調整 ADJ1)處理，得出調整後封閉解。

註 2：$\gamma_1 = 2.6005$，$\gamma_2 = 1.5$，$\gamma_3 = 0.5$，$\gamma_4 = -0.05$，$\gamma_5 = 0.15$。

註 3：$\beta = 0.1$。

我們以表 3 之 Monte Carlo 的結果為正確值，觀察表 2、表 4 與表 5 之差距列於表 10。

表 10　CDS options 價值差異

Monte Carlo (ADJ1，*sigma*=0.4，*rho*=1)

交換起始日暨選擇權到期日 (年)		違約交換期間 (年)			
選擇權價值差異 Difference (bps)		1	2	3	5
1	Hull & White	1.55	-2.16	-7.31	-16.15
	我們的模型	0.18**	-1.61*	-5.02*	-10.80*
	Brigo	1.32*	-0.68**	-2.56**	-6.08**
3	Hull & White	-2.23	-6.53	-10.74	-17.14
	我們的模型	-0.23**	-2.10**	-4.35**	-7.12**
	Brigo	-2.15*	-4.74*	-7.03*	-11.23*
5	Hull & White	-3.67	-6.60	-13.19	-19.92
	我們的模型	-1.25**	-3.09**	-5.89**	-6.21**
	Brigo	-2.75*	-4.18*	-8.25*	-15.23*

註 1：正號表示高估，即模型值高於蒙地卡羅值；負號表示低估，即模型值低於蒙地卡羅值。

註 2：**表示最接近蒙地卡羅值，*表示第二接近蒙地卡羅值。

我們以表 7 之 Monte Carlo 的結果為正確值，觀察表 6、表 8 與表 9 之差距列於表 11。

表 11　CDS options 價值差異

Monte Carlo (ADJ1，parametric *sigma* & *rho*)

$$sigma(T,t) = \gamma_1[\left(\exp(-\gamma_2(T-t)\right)\left(\gamma_4 + \gamma_3(T-t)\right) + \gamma_5]$$

$$rho(T_j, T_k) = \exp\left(-\beta\left|T_j - T_k\right|\right)$$

交換起始日暨選擇權到期日 (年)		違約交換期間 (年)			
選擇權價值差異 Difference (bps)		1	2	3	5
1	Brace, Dun & Barton	1.12*	-4.74	-18.35	-29.04
	我們的模型	-1.11**	-3.38*	-8.30*	-13.54*
	Brigo	2.15	-0.74**	-3.24**	-6.74**
3	Brace, Dun & Barton	-3.81	-7.25	-13.37	-25.85
	我們的模型	-1.02**	-0.65**	-3.08**	-7.16**
	Brigo	-3.00*	-5.85*	-8.28*	-12.57*
5	Brace, Dun & Barton	-4.17	-9.86	-14.80	-29.99
	我們的模型	-1.23**	-4.18**	-3.37**	-6.27**
	Brigo	-3.34*	-4.99*	-8.84*	-15.98*

註 1：正號表示高估，即模型值高於蒙地卡羅值；負號表示低估，即模型值低於蒙地卡羅值。

註 2：**表示最接近蒙地卡羅值，*表示第二接近蒙地卡羅值。

由表 10 與表 11 之結果歸納如表 12 如下。

表 12　模型優劣之比較結果

波動度參數與相關係數設定	$sigma$=0.4 rho=1		$sigma(T,t)=\gamma_1[\left(\exp(-\gamma_2(T-t)\right)$ $*\left(\gamma_4+\gamma_3(T-t)\right)+\gamma_5]$ $rho(T_j,T_k)=\exp\left(-\beta\left\|T_j-T_k\right\|\right)$	
評價正確性(次數)	**最優/總數	*次優/總數	**最優/總數	*次優/總數
Hull & White 與 Brace, Dun & Barton	0/12	1/12	0/12	1/12
我們的模型	9/12	3/12	9/12	3/12
Brigo	3/12	8/12	3/12	8/12

註 1：**表示最接近蒙地卡羅值(最優)，*表示第二接近蒙地卡羅值(次優)。

由表 12 可知，在起始日一年後、三年後、五年後，信用違約交換一年期、二年期、三年期、五年期之 CDS 選擇權，共十二種情況，我們的模型在波動度與相關係數之二種不同設定下，有九次最優，三次得到次優，都勝過 Brigo (2005a) 與 Hull & White (2003)，所以可以驗證我們模型相對優於另二者。

肆、模型應用

由式 (11)，我們已得到 CDS 選擇權之評價公式，市場上若存在 q 個 CDS 選擇權，本文的評價公式優於 Hull & White (2003) 評價公式；以 q=12 為例，Hull & White (2003) 的資料，起始日一年後、三年後、五年後，信用違約交換一年期、二年期、三年期、五年期之 CDS 選擇權，共十二種情況，建立投資組合如下。

$$V^{CDSO1}(t,T_1,T_2,K(1,2))=B_2(t)\left(\tilde{S}_2(t)N\left(d_1\left(\tilde{S}_2(t),K(1,2),K_2^*(1,2),\mho_2(1,2)\right)\right)\right.$$
$$\left.-K(1,2)N\left(d_2\left(\tilde{S}_2(t),K(1,2),K_2^*(1,2),\mho_2(1,2)\right)\right)\right)$$

$$V^{CDSO2}(t,T_1,T_3,K(1,3))=\sum_{n=2}^{3}B_n(t)\left(\tilde{S}_n(t)N\left(d_1\left(\tilde{S}_n(t),K(1,3),K_n^*(1,3),\mho_n(1,3)\right)\right)\right.$$
$$\left.-K(1,3)N\left(d_2\left(\tilde{S}_n(t),K(1,3),K_n^*(1,3),\mho_n(1,3)\right)\right)\right)$$

⋮

$$V^{CDSO4}(t,T_1,T_6,K(1,6))=\sum_{n=2}^{6}B_n(t)\left(\tilde{S}_n(t)N\left(d_1\left(\tilde{S}_n(t),K(1,6),K_n^*(1,6),\mho_n(1,6)\right)\right)\right.$$
$$\left.-K(1,6)N\left(d_2\left(\tilde{S}_n(t),K(1,6),K_n^*(1,6),\mho_n(1,6)\right)\right)\right)$$

⋮

$$V^{CDSOi}(t,T_a,T_b,K(a,b))=\sum\nolimits_{n=a+1}^{b}B_n(t)\Big(\tilde{S}_n(t)N\Big(d_1\Big(\tilde{S}_n(t),K(a,b),K_n^*(a,b),\mho_n(a,b)\Big)\Big)$$
$$-K(a,b)N\Big(d_2\Big(\tilde{S}_n(t),K(a,b),K_n^*(a,b),\mho_n(a,b)\Big)\Big)\Big)$$

$\vdots$

$$V^{CDSO12}(t,T_5,T_{10},K(5,10))=\sum\nolimits_{n=6}^{10}B_n(t)\Big(\tilde{S}_n(t)N\Big(d_1\Big(\tilde{S}_n(t),K(5,10),K_n^*(5,10),\mho_n(5,10)\Big)\Big)$$
$$-K(5,10)N\Big(d_2\Big(\tilde{S}_n(t),K(5,10),K_n^*(5,10),\mho_n(5,10)\Big)\Big)\Big)$$

當投資銀行發行此 q 個 CDS 選擇權可以合成如下，其中$(a,b-a)$的組合包括 (1,1)、(1,2)、(1,3)、(1,5)、(3,1)、(3,2)、(3,3)、(3,5)、(5,1)、(5,2)、(5,3)、(5,5)。我們可將多期遠期 CDS 拆解為各單期遠期 CDS，如表 13 所示。

表 13　多期遠期 CDS 拆解為單期遠期 CDS

交換起始日暨選擇權到期日(a)(年)	違約交換期間 (年) (b-a)			
拆解出單期 CDS	1	2	3	5
1	$\tilde{S}_2(t)$	$\tilde{S}_2(t),\tilde{S}_3(t)$	$\tilde{S}_2(t),\tilde{S}_3(t),\tilde{S}_4(t)$	$\tilde{S}_2(t),\tilde{S}_3(t),\tilde{S}_4(t),$ $\tilde{S}_5(t),\tilde{S}_6(t)$
3	$\tilde{S}_4(t)$	$\tilde{S}_4(t),\tilde{S}_5(t)$	$\tilde{S}_4(t),\tilde{S}_5(t),\tilde{S}_6(t)$	$\tilde{S}_4(t),\tilde{S}_5(t),\tilde{S}_6(t),$ $\tilde{S}_7(t),\tilde{S}_8(t)$
5	$\tilde{S}_6(t)$	$\tilde{S}_6(t),\tilde{S}_7(t)$	$\tilde{S}_6(t),\tilde{S}_7(t),\tilde{S}_8(t)$	$\tilde{S}_6(t),\tilde{S}_7(t),\tilde{S}_8(t),$ $\tilde{S}_9(t),\tilde{S}_{10}(t)$

表 13 共有 4 個$\tilde{S}_2(t)$，3 個$\tilde{S}_3(t)$，6 個$\tilde{S}_4(t)$，4 個$\tilde{S}_5(t)$，7 個$\tilde{S}_6(t)$，4 個$\tilde{S}_7(t)$，3 個 $\tilde{S}_8(t)$，1 個 $\tilde{S}_9(t)$，1 個 $\tilde{S}_{10}(t)$。我們可以將此 q 個 CDS 選擇權 $\sum\nolimits_{i=1}^{q}V^{CDSOi}(t,T_a,T_b,K(a,b))$ 重新組合如下。

一、4 個$\tilde{S}_2(t)$之單期 CDS 選擇權

$$B_2(t)\Big(\tilde{S}_2(t)\Big[N\Big(d_{1,1}^1(K_{1,1}^{2*})\Big)\Big)+N\Big(d_{1,2}^1(K_{1,2}^{2*})\Big)+N\Big(d_{1,3}^1(K_{1,3}^{2*})\Big)+N\Big(d_{1,5}^1(K_{1,5}^{2*})\Big)\Big]$$
$$-\Big[K_{1,1}N\Big(d_{1,1}^2(K_{1,1}^{2*})\Big)+K_{1,2}N\Big(d_{1,2}^2(K_{1,2}^{2*})\Big)+K_{1,3}N\Big(d_{1,2}^2(K_{1,3}^{2*})\Big)+K_{1,5}N\Big(d_{1,2}^2(K_{1,5}^{2*})\Big)\Big]\Big)$$

其中，$K_{1,3}^{2*}$之 1 的位置代表 CDS 起始日，3 的位置代表 CDS 結束日，2*的位置代表在調整履約價向量中，屬於價內累積機率$N\big(d^{1,2}\big)$中之$\tilde{S}_2(t)$的對應履約價，其他依此類推，$K_{1,5}$之 1 的位置代表 CDS 起始日，5 的位置代表 CDS 結束

日。

二、3 個 $\tilde{S}_3(t)$ 之單期 CDS 選擇權

$$B_3(t)\left(\tilde{S}_3(t)\left[N\left(d_{1,2}^1(K_{1,2}^{3*})\right)+N\left(d_{1,3}^1(K_{1,3}^{3*})\right)+N\left(d_{1,5}^1(K_{1,5}^{3*})\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[K_{1,2}N\left(d_{1,2}^2(K_{1,2}^{3*})\right)+K_{1,3}N\left(d_{1,3}^2(K_{1,3}^{3*})\right)+K_{1,5}N\left(d_{1,3}^2(K_{1,3}^{3*})\right)\right]\right)$$

三、6 個 $\tilde{S}_4(t)$ 之單期 CDS 選擇權

$$B_4(t)\left(\tilde{S}_4(t)\left[N\left(d_{1,3}^1(K_{1,3}^{4*})\right)+N\left(d_{1,5}^1(K_{1,5}^{4*})\right)+N\left(d_{3,1}^1(K_{3,1}^{4*})\right)+N\left(d_{3,2}^1(K_{3,2}^{4*})\right)\right.\right.$$
$$\left.+N\left(d_{3,3}^1(K_{3,3}^{4*})\right)+N\left(d_{3,5}^1(K_{3,5}^{4*})\right)\right]-\left[K_{1,3}N\left(d_{1,3}^2(K_{1,3}^{4*})\right)+K_{1,5}N\left(d_{1,5}^2(K_{1,5}^{4*})\right)\right.$$
$$\left.\left.+K_{3,1}N\left(d_{3,1}^2(K_{3,1}^{4*})\right)+K_{3,2}N\left(d_{3,2}^2(K_{3,2}^{4*})\right)+K_{3,3}N\left(d_{3,3}^2(K_{3,3}^{4*})\right)+K_{3,5}N\left(d_{3,5}^2(K_{3,5}^{4*})\right)\right]\right)$$

$\vdots$

四、1 個 $\tilde{S}_{10}(t)$ 之單期 CDS 選擇權

$$B_{10}(t)\left(\tilde{S}_{10}(t)\left[N\left(d_{1,5}^1(K_{1,5}^{10*})\right)\right]-K_{5,5}N\left(d_{5,5}^2(K_{5,5}^{10*})\right)\right)$$

經過拆解的單期 CDS 選擇權，式子似乎複雜，但其實較單純。現在不管投資組合如何變化，我們都可以依照上述分類方法，轉變成單期 CDS 選擇權。以上述的例子，要避險只需要依照各單期 CDS 選擇權的 delta 加總合成值即可，而且如果有些是 payer CDSwaptions，有些是 receiver CDSwaptions，則更是可以經由拆解為單期 CDS 選擇權，經過再合成(如一~四)後，可以更準確計算 CDSwaptions 信用投資組合之避險比率，而各單期 CDS 避險標的若有流動性不足的問題，可以藉由上下接近期之 CDS 來近似(兩者依期間長短取加權平均)，或使用固定期信用違約交換（constant maturity credit default swap，簡稱 CMCDS）來搭配換算，以取得較具流動性之近似標的來進行避險。因此，我們提出的模型不但可以提升評價的準確性，也能夠增進避險的技術。

伍、結論

本文採取縮減式模型來評價信用衍生性商品，採取 Brigo(2004, 2005a, 2005b, 2006)、Brigo & Morini (2005) 之單期 CDS 的觀念，並以 Jamshidian (2004)的模型設定為主架構，且有別於 Schonbucher (2000, 2003, 2004) 遠期 CDS 費率端之模型設定以及 Hull & White (2003) 與 Jamshidian (2004) 模型。我們以市場上交易之各年期 CDS 所導出之各單期 CDS 費率端價值做為計價資產，引用 Wu (2006) 的研究，稱此計價資產為分息風險債券價值，並將信用風險市場之信用曲線、各期間違約機率及回收率納入隱含違約交換率中，以吻合各單一期間之信

用市場狀況。我們在實證上採取 Hull & White (2003) 的例子，以我們的評價方法與 Hull & White (2003) 的方法及 Brigo (2005a) 的方法進行比較，實證結果顯示，我們的方法在評價相同標的不同起始期及不同契約存活期之 CDS 選擇權比 Hull & White (2003) 及 Brigo (2005a) 的方法準確，且在模型一致性方面優於 Hull & White (2003) 的模型。最後，我們將 Hull & White (2003) 十二種不同起始日與到期日的 CDS 選擇權視為一個投資組合，將其拆解後重組，分為十類各單期 CDS，可以很清楚觀察各期 CDS 選擇權所應避險的比率。在考量流動性的問題後，我們可以相鄰之 CDS 或運用 CMCDS 來避險，經加權平均後，來近似流動性較差的 CDS，可提升投資銀行避險與風險管理之技術。因此，本文的貢獻在於提出一個優於 Hull & White (2003)、Brigo (2005a) 之評價模型，且提供投資銀行能藉由拆解 CDS 選擇權投資組合，在轉換為各單期 CDS 選擇權投資組合過程中，清楚知道各單期 CDS 的避險比率，因此能夠更準確評估投資組合的風險，並進行避險。

附　錄

附錄一、單期 CDS 之求算

我們設定從 T_{n-1} 到 T_n 之遠期 CDS 保護端現金流量的近似值如下：

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_T^{T_{n-1},T_n,L_n} = L_n\left(\left(1_{\tau>T_{n-1}}+1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\Delta_{n-1}^*\right)-\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\right)\\
&= L_n\left(1_{\tau>T_{n-1}}-1_{\tau>T_n}\right)+L_n\left(1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\Delta_{n-1}^*-1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\\
&= L_n 1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}+L_n\tilde{\Delta}(n-1,n) = A_T^{T_{n-1},T_n,L_n}+L_n\tilde{\Delta}(n-1,n)
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

其中，$\Delta_n^*=\delta_n^*/\delta_n$，$\Delta_{n-1}^*=\delta_{n-1}^*/\delta_{n-1}$，$\tilde{\Delta}(n-1,n)=1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\Delta_{n-1}^*-1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*$。

因此，可得從 T_a 到 T_b 之遠期 CDS 保護端現金流量近似值如下：

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_T^{T_a,L_\Gamma} := \sum_{n=a+1}^{b}\tilde{A}_T^{T_{n-1},T_n,L_n} = \sum_{n=a+1}^{b}L_n\left(1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}+\tilde{\Delta}(n-1,n)\right)\\
&= \sum_{n=a+1}^{b}\left(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n}+L_n\tilde{\Delta}(n-1,n)\right) = A_T^{T_a,L_\Gamma}+\sum_{n=a+1}^{b}L_n\tilde{\Delta}(n-1,n)
\end{aligned}
$$

單期遠期 CDS rate 如下：

$$
\begin{aligned}
&S_n(t) := S(t,T_{n-1},T_n) = V_t^\beta(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n})\big/V_t^\beta(B_T^{T_n,\delta_n})\\
&= L_n E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\middle|H_t\right)\Big/E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}\delta_n+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^*\right)\middle|H_t\right)
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

我們定義單期遠期 CDS rate 近似值為 $\overline{S}_n(t)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
&\overline{S}_n(t) := \overline{S}(t,T_{n-1},T_n) = V_t^\beta(\tilde{A}_t^{T_{n-1},T_n,L_n})\big/V_t^\beta(B_T^{T_n,\delta_n})\\
&= L_n E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}+\tilde{\Delta}(n-1,n)\right)\middle|H_t\right)\Big/\left(\delta_n E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\middle|H_t\right)\right)\\
&= \frac{L_n E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(\left(1_{\tau>T_{n-1}}+1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\Delta_{n-1}^*\right)-\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\right)\middle|H_t\right)}{\delta_n E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\middle|H_t\right)}
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

其中 $\delta_n E^\beta\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\middle|H_t\right)=\delta_n P(t,T_n)E^n\left(\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\middle|H_t\right)$，我們定義 $D_n(t):=E^n\left(\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^*\right)\middle|H_t\right)$，且 $\overline{B}_n(t):=\delta_n P(t,T_n)D_n(t)$，$0\le n\le N$，其中 $\overline{B}_n(t)$ 在 Wu (2006) 的論文中，稱為分息零息風險債券價值，是可交易資產。因此，式 (A.3) 之分子與分母項可得如下：

分子項：

$$L_n E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(\left(1_{\tau>T_{n-1}}+1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\Delta_{n-1}^{*}\right)-\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^{*}\right)\right)\middle|H_t\right)$$

$$=L_n\left(E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_{n-1}}\left(1_{\tau>T_{n-1}}+1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\Delta_{n-1}^{*}\right)\middle|H_t\right)\frac{P(t,T_n)}{P(t,T_{n-1})}-E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_{n-1}}+1_{T_{n-2}<\tau\le T_{n-1}}\Delta_{n-1}^{*}\right)\middle|H_t\right)\right)$$

$$=L_n\left(P(t,T_{n-1})D_{n-1}(t)\frac{P(t,T_n)}{P(t,T_{n-1})}-P(t,T_n)D_n(t)\right)$$

$$=\frac{L_n}{\delta_n}\left(\bar{B}_{n-1}(t)\frac{P(t,T_n)}{P(t,T_{n-1})}-\bar{B}_n(t)\right)$$

分母項：

$$\delta_n E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\Delta_n^{*}\right)\middle|H_t\right)=\delta_n P(t,T_n)D_n(t)=\bar{B}_n(t)$$

因此，式 (A.3) 可得如下：

$$\bar{S}_n(t)=\frac{L_n}{\delta_n}\left(\bar{B}_{n-1}(t)\frac{P(t,T_n)}{P(t,T_{n-1})}-\bar{B}_n(t)\right)\Big/\bar{B}_n(t)=\frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{\bar{B}_{n-1}(t)P(t,T_n)}{\bar{B}_n(t)P(t,T_{n-1})}-1\right)$$
$$=\frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{\bar{B}_{n-1}(t)}{\bar{B}_n(t)\left(1+\delta_n F_n(t)\right)}-1\right)\approx\frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{\bar{B}_{n-1}(t)}{\bar{B}_n(t)\left(1+\delta_n F_n(0)\right)}-1\right)=:\tilde{S}_n(t) \qquad \text{(A.4)}$$

附錄二、CDS 選擇權調整後履約價之求算

依照 Jamshidian (2004) 的設定，CDS 選擇權的價值 C_t 可表示如下：

$$C_t=\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\beta}}\beta_t E^{\beta}\left[\frac{1}{\beta_T}\left(\sum_{n=a+1}^{b}V_T^{\beta}(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n})-K\sum_{n=a+1}^{b}V_T^{\beta}(B_T^{T_n,\delta_n})\right)^{+}\middle|\mathrm{H}_t\right]$$

$$=\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\beta}}\beta_t E^{\beta}\left[\frac{1}{\beta_T}\left(\sum_{n=a+1}^{b}\left(V_T^{\beta}(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n})-KV_T^{\beta}(B_T^{T_n,\delta_n})\right)\right)1_D\middle|\mathrm{H}_t\right]$$

$$=\sum_{n=a+1}^{b}\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}}V_t^{\bar{B}_n}(B_T^{T_n,\delta_n})E^{\bar{B}_n}\left(\left(V_T^{\bar{B}_n}(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n})\Big/V_T^{\bar{B}_n}(B_T^{T_n,\delta_n})-K\right)1_D\middle|\mathrm{H}_t\right)$$

$$=\sum_{n=a+1}^{b}\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}}\bar{B}_n(t)E^{\bar{B}_n}\left[\left(V_T^{\bar{B}_n}(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n})\Big/\bar{B}_n(T)-K\right)^{+}\middle|\mathrm{H}_t\right]$$

其 CDS 選擇權近似值 $\tilde{C}_t$ 可表示如下：

$$\tilde{C}_t = \sum_{n=a+1}^{b} \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}} \bar{B}_n(t) E^{\bar{B}_n}\left[\left(V_T^{\bar{B}_n}(\tilde{A}_T^{T_{n-1},T_n,L_n}) \big/ \bar{B}_n(T) - K\right)^+ \middle| \mathrm{H}_t\right]$$
$$= \sum_{n=a+1}^{b} \frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}} \bar{B}_n(t) E^{\bar{B}_n}\left(\left(\tilde{S}_n(T) - K\right) 1_D \middle| \mathrm{H}_t\right) \tag{A.5}$$

1_D 代表集合 D 的指標函數(indicator function)，$\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}}} \bar{B}_n(t) = B_n(t)$ ，$\bar{B}_n(t) = V_t^{\bar{B}_n}(B_T^{T_n,\delta_n})$ ，且 $V_T^{\bar{B}_n}(\tilde{A}_T^{T_{n-1},T_n,L_n}) \big/ \bar{B}_n(T) = \tilde{S}_n(T)$ 。

$$D := \left\{\left(\sum_{n=a+1}^{b}\left(V_T^{\beta}(\tilde{A}_T^{T_{n-1},T_n,L_n}) - K V_T^{\beta}(B_T^{T_n,\delta_n})\right)\right) > 0\right\} = \left\{V_T^{\beta}(\tilde{A}_T^{T_a,L_\Gamma}) - K V_T^{\beta}(B_T^{\delta_\Gamma}) > 0\right\}$$
$$= \left\{V_T^{\beta}(B_T^{\delta_\Gamma})\left(\tilde{S}(T,T_a,T_b) - K\right) > 0\right\} = \left\{\tilde{S}(T,T_a,T_b) - K > 0\right\} \tag{A.6}$$

$\tilde{S}(T,T_a,T_b) - K$ 可得如下：

$$\tilde{S}(T,T_a,T_b) - K = \frac{V_T^{\beta}(\tilde{A}_T^{T_a,L_\Gamma})}{V_T^{\beta}(B_T^{\delta_\Gamma})} - K = \frac{\sum_{n=a+1}^{b} \frac{L_n}{\delta_n}\left(\bar{B}_{n-1}(T)\frac{P(T,T_n)}{P(T,T_{n-1})} - \bar{B}_n(T)\right)}{\sum_{n=a+1}^{b} \bar{B}_n(T)} - K$$
$$= \sum_{n=a+1}^{b}\left(\frac{\bar{B}_n(T)}{\sum_{h=1}^{N} \bar{B}_h(T)}\left(\frac{L_n}{\delta_n}\left(\bar{B}_{n-1}(T)\frac{P(T,T_n)}{P(T,T_{n-1})} - \bar{B}_n(T)\right) \Big/ \bar{B}_n(T)\right)\right) - K$$
$$= \sum_{n=a+1}^{b} \theta_n(T;\bar{B}_n(T)) \bar{S}_n(T) - K$$
$$\approx \sum_{n=a+1}^{b} \theta_n(T;\bar{B}_n(T)) \tilde{S}_n(T) - K \tag{A.7}$$
$$= \sum_{n=a+1}^{b} \theta_n(T;\bar{B}_n(T)) \tilde{S}_n(T) - \sum_{n=a+1}^{b} \theta_n(t;\bar{B}_n(T)) K_n^T$$
$$= \sum_{n=a+1}^{b} \theta_n(T;\bar{B}_n(T))\left(\tilde{S}_n(T) - K_n^T\right)$$
$$\approx \sum_{n=a+1}^{b} \theta_n(0;\bar{B}_n(0))\left(\tilde{S}_n(T) - K_n^T\right)$$

其中，$\theta_n(T;\bar{B}_n(T)) := \frac{\bar{B}_n(T)}{\sum_{k=a+1}^{b} \bar{B}_k(T)}$ ，$K = \sum_{n=a+1}^{b} \theta_n(T;\bar{B}_n(T)) K_n^T$，由式 (A.4) 在時點 T 可得：$\bar{S}_n(T) = \frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{\bar{B}_{n-1}(T)}{\bar{B}_n(T)\left(1+\delta_n F_n(T)\right)} - 1\right)$ ，且

$$\bar{S}_n(T) \approx \tilde{S}_n(T) = \frac{L_n}{\delta_n}\left(\frac{\bar{B}_{n-1}(T)}{\bar{B}_n(T)\left(1+\delta_n F_n(0)\right)} - 1\right) = \frac{L_n}{\delta_n}\left(\left(w_n(T) \big/ \left(1+\delta_n F_n(0)\right)\right) - 1\right) 。$$

而 $\bar{B}_n(T) = \delta_n E^{\beta}\left(\frac{\beta_T}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n} + 1_{T_{n-1}<\tau\le T_n} \Delta_n^*\right) \middle| H_T\right) = \delta_n P(T,T_n) D_n(T)$ 。

我們運用 Brigo and Mercurio (2006) p.862 的方法，求出在不同計價單位下的遠期 CDS rate 之動態過程。以向量表示之遠期 CDS rate 為

$\tilde{S}(t)=\left(\tilde{S}_1(t),\tilde{S}_2(t),\cdots,\tilde{S}_b(t)\right)'$，其布朗運動以向量表達為：

$W_t=\left(W_1(t),W_2(t),\cdots,W_b(t)\right)'$。$d\tilde{S}_n(t)=\sigma_n(t)\tilde{S}_n(t)dW_n^n(t)$，對所有 n 都成立。

依 Brigo & Mercurio（2006）之向量擴散係數（vector diffusion coefficient，簡寫為 DC）定義，$\tilde{S}_m(t)$ 在 $\tilde{S}_n(t)$ 的計價單位 $\bar{B}_n$ 下，且 $m<n$，則 dW^m 與 dW^n 的關係如下：

$$dW^m=dW^n-\rho DC\left(\ln\left(\frac{\bar{B}_m}{\bar{B}_n}\right)\right)'dt$$

$$=dW^n-\rho DC\ln\left(\left(\Pi_{k=m+1}^{n}\left(\frac{\delta_k}{L_k}\tilde{S}_k+1\right)\left(1+\delta_k F_k(0)\right)\right)\right)'dt$$

$$=dW^n-\rho\sum_{k=m+1}^{n}DC\ln\left(\left(\frac{\delta_k}{L_k}\tilde{S}_k+1\right)\left(1+\delta_k F_k(0)\right)\right)'dt$$

$$=dW^n-\rho\sum_{k=m+1}^{n}DC\ln\left(\left(\frac{\delta_k}{L_k}\tilde{S}_k+1\right)\right)'dt$$

$$=dW^n-\rho\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{\tilde{S}_k+\left(L_k/\delta_k\right)}DC\left(\tilde{S}_k\right)'dt$$

所以，可以得到下式：

$$dW_m^m=dW_m^n-\sum_{k=m+1}^{n}\rho_{m,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k}{\tilde{S}_k+\left(L_k/\delta_k\right)}dt \text{，當 } m<n \text{。}$$

$$dW_m^m=dW_m^n \text{，當 } m=n \text{。}$$

$$dW_m^m=dW_m^n+\sum_{k=n+1}^{m}\rho_{m,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k}{\tilde{S}_k+\left(L_k/\delta_k\right)}dt \text{，當 } m>n \text{。}$$

因此，可得 $\tilde{S}_m(t)$ 在 $\bar{B}_n$ 測度之動態過程分別如下：

$$d\tilde{S}_m(t)=\sigma_m(t)\tilde{S}_m(t)\left(dW_m^n(t)-\sum_{k=m+1}^{n}\rho_{m,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k(t)}{\tilde{S}_k(t)+\left(L_k/\delta_k\right)}dt\right)\text{，當 } m<n \text{。}$$

$$d\tilde{S}_m(t)=\sigma_m(t)\tilde{S}_m(t)dW_m^m(t)=\sigma_n(t)\tilde{S}_n(t)dW_n^n(t)\text{，當 } m=n \text{。}$$

$$d\tilde{S}_m(t)=\sigma_m(t)\tilde{S}_m(t)\left(dW_m^n(t)+\sum_{k=n+1}^{m}\rho_{m,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k}{\tilde{S}_k+\left(L_k/\delta_k\right)}dt\right)\text{，當 } m>n \text{。}$$

用確定係數 $\tilde{S}_k(0)$ 取代 $\tilde{S}_k(t)$，以求得漂移項的近似值如下：

$$-\sum_{k=m+1}^{n}\rho_{m,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k(t)}{\tilde{S}_k(t)+\left(L_k/\delta_k\right)}\approx-\sum_{k=m+1}^{n}\rho_{m,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k(0)}{\tilde{S}_k(0)+\left(L_k/\delta_k\right)}=:\mu_m^n(t)\text{ ，當 } m<n\text{ 。}$$

$$0=:\mu_n^n(t)\text{ ，當 } m=n\text{ 。}$$

$$\sum_{k=n+1}^{m}\rho_{m,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k}{\tilde{S}_k+\left(L_k/\delta_k\right)}\approx\sum_{k=n+1}^{m}\rho_{m,k}\frac{\sigma_k(t)\tilde{S}_k(0)}{\tilde{S}_k(0)+\left(L_k/\delta_k\right)}=:\mu_m^n(t)\text{ ，當 } m>n\text{ 。}$$

因此，$\tilde{S}_m(t)$ 與 $\ln\left(\tilde{S}_m(t)\right)$ 在 $\bar{B}_n$ 測度之動態過程分別如下：

$$d\tilde{S}_m(t)=\sigma_m(t)\tilde{S}_m(t)\left(\mu_m^n(t)dt+dW_m^n(t)\right)$$

$$d\ln\left(\tilde{S}_m(t)\right)=\left(\mu_m^n(t)\sigma_m(t)-\tfrac{1}{2}\sigma_m(t)^2\right)dt+\sigma_m(t)dW_m^n(t)$$

以向量表示之遠期 CDS rate $\tilde{S}(t)=\left(\tilde{S}_1(t),\tilde{S}_2(t),\cdots,\tilde{S}_b(t)\right)'$ 在時點 T 為 $\tilde{S}(T)=\left(\tilde{S}_1(T),\tilde{S}_2(T),\cdots,\tilde{S}_b(T)\right)'$，在 $\bar{B}_n$ 測度下可表示如下：

$$\tilde{S}(T)=\tilde{S}(0)\exp\left(\int_0^T\left(\sigma(t)\mu_{(\cdot)}^n(t))-\tfrac{1}{2}\sigma(t)'\sigma(t)\right)dt\right)\exp(Y^n)\tag{A.8}$$

，其中 $\mu_{(\cdot)}^n(t)=\left(\mu_1^n(t),\mu_2^n(t),\cdots,\mu_b^n(t)\right)'$，$\sigma(t)=\begin{pmatrix}\sigma_1(t)&0&0&0\\0&\sigma_2(t)&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\sigma_b(t)\end{pmatrix}$

且 $Y^n\sim N(0,V)$，$V_{l,k}=\int_0^T\sigma_l(t)\sigma_k(t)\rho_{l,k}dt$，

因此可得到 $Y^n=Y^T-\int_0^T\sigma(t)\left(\mu_{(\cdot)}^n(t)-\mu_{(\cdot)}^T(t)\right)dt$ 。

我們依 Brigo & Mercurio (2006) p.273 的方法，將 (T_b-T_a)-秩矩陣(rank matrix)以秩-1 矩陣(rank-one matrix)來近似，可以得到一個惟一(unique) dominant 特徵值(eigenvalue) 如下：

$\mho:=\sqrt{\lambda_1(V)}e_1(V)$，其中 $\lambda_1(V)$ 代表 V 的最大特徵值，$e_1(V)$ 是對應的特徵向量。而 V 在秩-1 矩陣之近似值為 V_1，且 $V_1:=\mho\mho^1$。更一般化來說，$\lambda_k(V)$ 代表 V 的第 k 個最大特徵值，$e_k(V)$ 是對應的特徵向量。並以 V_1 代替 V 代入式 (A.4) 中，因此可得，$Y^n\sim N(0,V_1)$，且 $Y_m^n=\mho_m U^n$，且 U^n 是 $\bar{B}_n$ 測度之標準常態隨機變數值。此方法之優點在於現在所有向量 $\tilde{S}(t)$ 的隨機性質縮減為隨機變數值 U^n 。

因此，式 (A.8) 在時點 T 對應之遠期 CDS rate 向量可改寫如下：

$\tilde{S}(T)=\tilde{S}(0)\exp\left(\mho_{(\cdot)}^{n}-\frac{1}{2}\mho^{2}\right)\exp(Y^{n})$

其中，漂移項的時間累積值$\mho_{(\cdot)}^{n}$依m與n之大小關係，表達如下：

$$\int_0^T\sigma_m(t)\mu_m^n(t)dt=-\mho_m\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\mho_k\tilde{S}_k(0)}{\tilde{S}_k(0)+\left(L_k/\delta_k\right)}=:\mho_m z_m^n \text{，當 } m<n \text{。}$$

$$\int_0^T\sigma_n(t)\mu_n^n(t)dt=\mho_n 0=:\mho_n z_n^n \text{，當 } m=n \text{。}$$

$$\int_0^T\sigma_m(t)\mu_m^n(t)dt=\mho_m\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\mho_k\tilde{S}_k(0)}{\tilde{S}_k(0)+\left(L_k/\delta_k\right)}=:\mho_m z_m^n \text{，當 } m>n \text{。}$$

而$Y^n=Y^k-\mho(z_{(\cdot)}^n-z_{(\cdot)}^k)=\mho(U^k+z_{(\cdot)}^k-z_{(\cdot)}^n)$，其中，$T_k=T_a,\cdots,T_b$，$Y^k=\mho U^k$。我們定義在時點$T$對應之$Y^T:=\mho U$，並令$\upsilon=z_{(\cdot)}^T$可得$Y^n=Y^T-\mho(z_{(\cdot)}^n-z_{(\cdot)}^T)=\mho(U+\upsilon-z_{(\cdot)}^n)$。令$\upsilon_n=\upsilon-z_{(\cdot)}^n$，可得如下：

$$\tilde{S}_n(T;U^n):=\tilde{S}_n(0)\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mho_n^2\right)\exp(\mho_n U^n)$$
$$=\tilde{S}_n(0)\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mho_n^2\right)\exp\left(\mho_n(U+\upsilon_n)\right)=:\tilde{S}_n(T;U)$$

其中，$U^n=U+\upsilon_n$。因此，運用 Brace (1996) 與 Brigo & Mercurio (2006) p.275 之方法，我們檢驗$\tilde{S}(T,T_a,T_N)-K\approx\sum_{n=a+1}^{b}\theta_n(0;\bar{B}_n(0))\tilde{S}_n(T;U)-K$是否為$U$的遞增函數，重寫式 (A.7) 之指標函數$D$如下：

$$D=\tilde{S}(T,T_a,T_b)-K\approx\sum_{n=a+1}^{b}\theta_n(0;\bar{B}_n(0))\tilde{S}_n(T)-K$$
$$=\sum_{n=a+1}^{b}\theta_n(0;\bar{B}_n(0))\left(\tilde{S}_n(T;U)-K_n^T\right)>0$$

因為$\tilde{S}_n(T;U)=\tilde{S}_n(0)\exp\left(-\frac{1}{2}\mho_n^2\right)\exp(\mho_n(U+\upsilon_n))$，當$U$增加時，$\tilde{S}_n(T;U)$也會增加。亦即$\frac{\partial}{\partial U}\sum_{n=a+1}^{b}\theta_n(0;\bar{B}_n(0))\tilde{S}_n(T;U)=\sum_{n=a+1}^{b}\theta_n(0;\bar{B}_n(0))\frac{\partial\tilde{S}_n(T;U)}{\partial U}>0$。可得$\tilde{S}(T,T_a,T_b)-K$是$U$的遞增函數，我們設定存在$U^*$，使得$\tilde{S}(T,T_a,T_b,U^*)-K=0$，即$\sum_{n=a+1}^{b}\theta_n(0;\bar{B}_n(0))\left(\tilde{S}_n(T,U^*)\right)=K$。

將$\tilde{S}_n(T;U^*)=\tilde{S}_n(0)\exp\left(-\frac{1}{2}\mho_n^2\right)\exp(\mho_n(U^*+\upsilon_n))$代入上式，則只剩一個未知數$U^*$，我們可以將其求出，然後代入$\tilde{S}_n(T,U^*)$，找到調整後的履約價$K_n^*=\tilde{S}_n(T,U^*)$，$n=a+1,\cdots,b$。

附錄三、從 CDS 選擇權一般化模型縮減為 Jamshidian（2004）CDS 選擇權公式

在無套利機會下，多期 CDS 費率端價值等於保護端價值 $S(t,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b} V_t^{\beta}(B_T^{T_n,\delta_n})\right)=\sum_{n=a+1}^{b} V_t^{\beta}(A_T^{T_{n-1},T_n,L_n})$，因此可得式 (A.9) 如下：

$$
\begin{aligned}
&S(t,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b} E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}\left(1_{\tau>T_n}\delta_n+1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\delta_n^{*}\right)\middle|H_t\right)\right)\\
&=\sum_{n=a+1}^{b} L_n E^{\beta}\left(\frac{\beta_t}{\beta_n}1_{T_{n-1}<\tau\le T_n}\middle|H_t\right)
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

由式 (A.9) 可得：

$$
\begin{aligned}
&S(t,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b}\bar{B}_n(t)\right)\\
&=\sum_{n=a+1}^{b} L_n\left(\bar{B}_{n-1}(t)\frac{P(t,T_n)}{P(t,T_{n-1})}-\bar{B}_n(t)+P(t,T_n)\tilde{\Delta}(n-1,n)\middle|H_t\right)\\
&=\sum_{n=a+1}^{b-1} L_n\left(\bar{B}_{n-1}(t)\frac{P(t,T_n)}{P(t,T_{n-1})}-\bar{B}_n(t)+P(t,T_n)\tilde{\Delta}(n-1,n)\middle|H_t\right)\\
&+L_b\left(\bar{B}_{b-1}(t)\frac{P(t,T_b)}{P(t,T_{b-1})}-\bar{B}_b(t)\right)+L_bP(t,T_b)E^{b}\left(\tilde{\Delta}(b-1,b)\middle|H_t\right)\\
&=S(t,T_{a+1},T_{b-1})\left(\sum_{n=a+1}^{b-1}\bar{B}_n(t)\right)+S(t,T_{b-1},T_b)\bar{B}_b(t)
\end{aligned}
$$

藉由遞回法（recursive method），可得：

$$
S(t,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b}\bar{B}_n(t)\right)=\sum_{n=a+1}^{b} S(t,T_{n-1},T_n)\bar{B}_n(t)
$$

在無套利條件下，於時點 T，上式依然成立如下：

$$
\begin{aligned}
&S(T,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b}\bar{B}_n(T)\right)\\
&=\sum_{n=a+1}^{b} S(T,T_{n-1},T_n)\bar{B}_n(T)\\
&\approx\sum_{n=a+1}^{b}\tilde{S}_n(T)\bar{B}_n(T)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{C}_t=\sum_{n=a+1}^{b}\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}_n}}\delta_n\bar{B}_n(t)E^{\bar{B}_n}\left(\left(\tilde{S}_n(T)-K\right)1_D\middle|\mathrm{H}_t\right)\\
&\approx\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\beta}}\beta_tE^{\beta}\left[\frac{1}{\beta_T}\left(\sum_{n=a+1}^{b}\left(S(T,T_{n-1},T_n)\bar{B}_n(T)-K\bar{B}_n(T)\right)\right)1_D\middle|\mathrm{H}_t\right]
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

若單期 CDS rate 是水平的，則可得：

$$
S(t,T_a,T_{a+1})=S(t,T_{a+1},T_{a+2})=\cdots=S(t,T_{b-1},T_b)
$$

$$S(t,T_{a+1},T_b)\left(\sum_{n=a+1}^{b}\bar{B}_n(t)\right)=\sum_{n=a+1}^{b}S(t,T_{n-1},T_n)\bar{B}_n(t)=S(t,T_a,T_{a+1})\left(\sum_{n=a+1}^{b}\bar{B}_n(t)\right)$$

因此，$S(t,T_{a+1},T_b)=S(t,T_a,T_{a+1})=S(t,T_{a+1},T_{a+2})=\cdots=S(t,T_{b-1},T_b)$，若波動度是水平的，且相關係數為 1，則在時點 T 之單期 CDS rate 與多期 CDS rate 相等。

$$S(T,T_{a+1},T_b)=S(T,T_a,T_{a+1})=S(T,T_{a+1},T_{a+2})=\cdots=S(T,T_{b-1},T_b)$$

所以，由式 (A.10) 可得：

$$\begin{aligned}\tilde{C}_t&=\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\beta}}\beta_t E^{\beta}\left[\frac{1}{\beta_T}\left(S(T,T_a,T_{a+1})\left(\sum_{n=a+1}^{b}\bar{B}_n(T)\right)-K\left(\sum_{n=a+1}^{b}\bar{B}_n(T)\right)\right)1_D\middle|\mathrm{H}_t\right]\\&=\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\beta}}\left(\sum_{n=a+1}^{b}\bar{B}_n(t)\right)E^{\bar{B}}\left[\left(S(T,T_{a+1},T_b)-K\right)1_D\middle|\mathrm{H}_t\right]\\&=\left(\sum_{n=a+1}^{b}B_n(t)\right)\left(S(t,T_{a+1},T_b)N(d_1)-KN(d_2)\right)\end{aligned}$$

其中，$d_{1,2}=\left(\ln(\tilde{S}(t,T_{a+1},T_b)/K)\pm\frac{1}{2}\mho^2\right)\Big/\mho$，$t\le T$，$\frac{1_{\tau>t}}{\alpha_t^{\bar{B}}}\bar{B}_n(t)=B_n(t)$。

故得證，Jamshidian (2004) 與 Hull & White (2003) CDS 選擇權模型是我們模型之特例。

參考文獻

Black, F. (1976), "The pricing of commodity contracts," *Journal of Financial Economics*, 3(1): 167-179.

Brace, A. (1996), *Dual swap and swaption formula in the normal and lognormal models*, Working Paper, University of NSW School of Mathematics, Australia.

Brace, A., T. Dun, and G. Barton (2001), "Toward a central interest rates model," In E. Jouini, J. Cvitanic, and M. Musiela (Eds.) *Option pricing, interest rates and risk management*, New York : Cambridge University Press:Ch8, p.278-313.

Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela (1997), "The market model of interest rate dynamics," *Mathematical Finance*, 7(2): 122-147.

Brigo, D. (2004), *Candidate market models and the calibrated CIR++ stochastic intensity model for credit default swap options and callable floaters*, Paper presented at the Proceedings of the 4-th ICS Conference, Tokyo, Japan.

________ (2005a), "Market model for CDS options and callable floaters," *Risk*, 18(1): 89-94.

________ (2005b), "*Constant maturity credit default swap pricing with market models*," Working Paper, Milano, Italy.

________ (2006), "CMCDS valuation with market models," *Risk*, 19(6): 78-83.

Brigo, D., and F. Mercurio (2006), Interest rate models- theory and practice, (2th ed.), Germany: Springer-Verlag.

Brigo, D., and M. Morini (2005), "*CDS market formulas and models*," Working Paper, Milano, Italy.

Elliott, R., M. Jeanblanc, and M. Yor (2000), "On models of default risk," *Mathematical Finance*, 10(2): 179-195.

Felsenheimer, J., P. Gisdakis, and M. Zaiser (2006), "*Active credit portfolio management*," Germany: Wiley-VCH: Ch10, p.303-364.

Hull, J. C., and A. White (2000), "Valuing credit default swaps I: no counterparty default risk," *Journal of Derivatives*, 7(4):29-40.

________ (2003), "The valuation of credit default swap options," *Journal of Derivatives*, 10(3): 40-50.

Jackel, P., and R. Rebonato (2000), "*Linking caplet and swaption volatilities in a BGM/J framework: approximate solutions*," Working Paper, Quantitative Research Centre, The Royal Bank of Scotland, London.

Jamshidian, F. (2004), "Valuation of credit default swaps and swaptions," *Finance and Stochastics*, 8(3): 343-371.

Jeanblanc, M., and M. Rutkowski (2000), "*Modelling of default risk: mathematical tools*," Working Paper, d'Evry University Department of Mathematics.

JPMorgan (2001), "*Par credit default swap spread approximation from default* *probabilities*," Credit Derivatives at JPMorgan Securities Inc., New York.

Kijima, M., and K. Komoribayashi, (1998), "A markov chain model for valuing credit risk derivatives," *Journal of Derivatives*, 6(1): 97-108.

Merrill Lynch (2006), "*Credit Derivatives Handbook 2006-Vol 2,*" Global Securities Research & Economics Group at Merrill Lynch Securities Inc., New York.

Schonbucher, P. J. (2000), "*A LIBOR market model with default risk*," Working Paper, Bonn University Department of Statistics, Germany.

________ (2003), "*A note on survival measures and the pricing of options on credit default swaps*," Working Paper, ETH Zurich Department of Mathematics, Switzerland.

________ (2004), "A measure of survival," *Risk*, 17(8): 79-85.

Wu, L. (2006), "*Arbitrage pricing of single-name credit derivatives*," Working Paper, Science and Technology University Department of Mathematics, Hong Kong.