# 從機率空間,隨機變數到隨機過程

Financial Engineering and Computations

Dai, Tian-Shyr



# 授課大綱

- 機率空間的定義
  - σ-algebra →描述已知資訊集合
- 隨機變數的定義和建構
  - 機率密度函數,期望值,變異數
- 隨機過程
  - Filtration
  - 重要性質
    - Martingale
    - Markov process
- 證明無套利機會和風險中立機率的關係

# 機率空間的定義

- 機率空間　P(Ω,ℱ,u)
  - Ω:宇集合
  - ℱ: σ-algebra → 描述資訊集合
  - u:測度函數 ℱ→[0,1]
- 實例:丟兩個公正的銅板
  - 銅板一:一面爲紅色,另一面爲綠色
  - 銅板二:一面刻 “正”,另一面刻 “反”
  - 共有四種狀況: “紅正”,“紅反”,“綠正”,“綠反”這四種狀況出現的機率皆爲1/4
  - Ω={“紅正”,“紅反”,“綠正”,“綠反”}



# σ-algebra:資訊集合

- 如果ℱ爲σ-algebra
  - ℱ中每個元素e⊂ Ω
  - Ω,φ∈ ℱ
  - 如果$A_1$ ∈ ℱ → $\overline{A_1}$ ∈ ℱ
  - 如果$A_1$, $A_2$,… ∈ ℱ → $\bigcup_i A_i$ ∈ℱ
  - 如果$A_1$, $A_2$,… ∈ ℱ → $\bigcap_i A_i$ ∈ℱ

經由推論所得的知識
也落在σ-algebra中

- 假定有一個色盲,不能分辨顏色,只能分辨“正” “反”
  - “正” 事件→ {“紅正”,“綠正”}
  - “反” 事件→ {“紅反”,“綠反”}
  - 色盲的資訊集合$ℱ_1$={Ω,φ, {“紅正”,“綠正”}, {“紅反”,“綠反”}}

# σ-algebra:資訊集合

- 假定有一個文盲,不能分辨文字,只能分辨“紅”“綠”
  - “紅” 事件→ {“紅正”,“紅反”}
  - “綠” 事件→ {“綠正”,“綠反”}
  - 文盲的資訊集合$\mathscr{F}_2$={Ω,ϕ, {“紅正”,“紅反”}, {“綠正”,“綠反”}}
- 當色盲和文盲溝通,就可透過推論辨別文字和顏色
  - Ex: {“紅正”,“綠正”}∩ {“紅正”,“紅反”}={“紅正”}
  - {“紅正”,“綠正”}∪ {“紅正”,“紅反”}={“紅正”,“綠正”,“紅反”}→ “綠反”事件未發生



# σ-algebra:資訊集合

- 文盲和色盲溝通後建立新的資訊集合$\mathscr{F}$

兩個人的資訊集合

- $\mathscr{F}$= {Ω,ϕ,
{“紅正”,“綠正”}, {“紅反”,“綠反”},
{“紅正”,“紅反”}, {“綠正”,“綠反”},
{“紅正”},{“綠正”},{“紅反”},{“綠反”}
{“紅正”,“綠反”}, {“綠正”,“紅反”},
{“紅正”,“綠正”,“紅反”},{“紅正”,“綠正”,“綠反”},
{“紅正”,“紅反”,“綠反”},{“紅反”,“綠正”,“綠反”},
}

共 $2^4 = 16$ 元素

再做推論

# 機率測度函數

- u: $\mathscr{F} \rightarrow [0,1]$
- 爲滿足機率的定義
  - $u(\Omega)=1$, $u(\phi)=0$, $u(A \cup B)=u(A)+u(B)$ if $A \cap B=\phi$
- 以色盲爲例 $P(\Omega, \mathscr{F}_1, u_1)$
  - $u_1(\Omega)=1$, $u_1(\phi)=0$,
  - $u_1$({“紅正”,“綠正”})=0.5
  - $u_1$({“紅正”,“紅反”}) →不可測
  - $u_1$ ({“紅正”}) →不可測



# 課堂練習:機率測度函數

- 定義文盲的機率空間: $P(\Omega, \mathscr{F}_2, u_2)$
- 文盲和色盲溝通後的機率空間: $P(\Omega, \mathscr{F}, u)$
- 嘗試回答下列問題:
  - $u_2$({“紅正”,“綠正”})
  - $u_2$({“紅正”,“紅反”})
  - $u_2$({“紅正”,“綠正”,“綠反”})
  - u({“紅正”,“紅反”})
  - u({“紅正”})

# 隨機變數的建立

- 隨機變數: Ω→R
- 承上例: Ω={“紅正”,“紅反”,“綠正”,“綠反”}
- 色盲定義變數X
  - X = 1 if “紅正”,“綠正” occur
  - X = -1 if “紅反”,“綠反” occur
- 文盲定義變數Y
  - Y = 1 if “紅正”,“紅反” occur
  - Y = -1 if “綠正”,“綠反” occur
  - 色盲無法定義Y,文盲無法定義X



# 隨機變數的性質

- 變數X和Y有相同的機率密度函數
  - X and Y =1 with probability 0.5
  - =-1 with probability 0.5
  - Since u({“紅正”,“綠正”})=u({“紅反”,“綠反”}) =u({“紅正”,“紅反”})=u({“綠正”,“綠反”})=0.5
  - Different variables! i.e. X≠Y
  - Mean of X,Y= 0.5×1+0.5×(-1)=0
  - Variance of X,Y= $0.5\times(1-0)^2+0.5\times(-1-0)^2=1$
  - Cov(X,Y)=0.25×(1×1×2 +1×(-1)×2)=0
  - X and Y are independent.
    - u(X=a) × u(Y=b)=u(X=a∩Y=b)

# 課堂練習:建構隨機變數

- 請在 P(Ω,$\mathscr{F}$,u)的機率空間建構隨機變數Z
- Z的機率密度函數如下:
  - Z=1　with probability 0.25
  - Z=0　with probability 0.5
  - Z=-1　with probability 0.25
- 計算共變異數
  - Cov(X,Z)
  - Cov(Y,Z)



# 課堂練習:變數獨立和共變異數關係

- 如果變數X和Z獨立,則
  - $u(X=a) \times u(Z=b)=u(X=a\cap Z=b)$
  - Cov(X,Z)=E((X-Mx)(Z-Mz))= E(X-Mx)E(Z-Mz)=0
- 但Cov(X,Z)=0,可說明X,Z獨立嗎?
  - 請修改上題的隨機變數Z,使得Cov(X,Z)=0
  - 但$u(X=a) \times u(Z=b)\neq u(X=a\cap Z=b)$

| | 正 | 反 |
|---|---|---|
| 紅 | X=1,Y=1 | X=-1,Y=1 |
| 綠 | X=1,Y=-1 | X=-1,Y=-1 |

# 利用隨機變數建構新的隨機變數

- 令 W=F(X,Y)
  - 因為X,Y為隨機變數→ W也為隨機變數
  - W可用P(Ω,ℱ,u)來描述
- 範例
  - W=X+Y

| | 正 | 反 |
|---|---|---|
| 紅 | X=1,Y=1, W=2 | X=-1,Y=1,W=0 |
| 綠 | X=1,Y=-1, W=0 | X=-1,Y=-1,W=-2 |



# 使用P(Ω,ℱ,u)來描述W

- Ω→R
  - "紅正" → W=2 with probability 0.25
  - "紅反","綠正" → W=0 with probability 0.5
  - "綠反"→ W=-2 with probability 0.25
- E(W)= 0.25×2+0×0.5+0.25×(-2)=0
- Var(W)= $0.25\times(2-0)^2+0.5\times(0-0)^2+0.25\times(-2-0)^2=2$
- Cov(X,W)=0.25×(1×2+(-1)×0+1×0+(-1)×(-2)=1 →They are dependent.

# 條件機率

- 條件機率:給定一已知事件A下求另一事件B發生的機率→ $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- Ex: 以色盲爲例:當銅板出現正面時(X=1),求算變數W=2的機率

$$P(W=2\,|\,\text{正面})=P(\mathrm{W}=2\,|\,X=1)=\frac{0.25}{0.5}=0.5$$

| | 正 | 反 |
|---|---|---|
| 紅 | X=1,Y=1, W=2 | X=-1,Y=1,W=0 |
| 綠 | X=1,Y=-1, W=0 | X=-1,Y=-1,W=-2 |



# 課堂練習:條件機率

- 以文盲爲例,算當銅板出現綠色時(Y=-1),變數W=2的機率

| | 正 | 反 |
|---|---|---|
| 紅 | X=1,Y=1, W=2 | X=-1,Y=1,W=0 |
| 綠 | X=1,Y=-1, W=0 | X=-1,Y=-1,W=-2 |

# 條件期望值

- 條件期望值:給定一已知事件A下求算隨機變數R的期望值→E(R|A)
- Ex: 以色盲爲例:
  - 當銅板出現正面時(X=1),變數W的期望值
  - E(W|X=1)=2×0.5+0×0.5=1=X
  - E(W|X=-1)=-2×0.5+0×0.5=-1=X

| | 正 | 反 |
|---|---|---|
| 紅 | X=1,Y=1, W=2 | X=-1,Y=1,W=0 |
| 綠 | X=1,Y=-1, W=0 | X=-1,Y=-1,W=-2 |



# 條件期望值

- 色盲的資訊集合可用資訊集合$\mathfrak{F}_1$表示
  - $\mathfrak{F}_1$={Ω,φ, {"紅正","綠正"}, {"紅反","綠反"}}
    - 變數X爲 $\mathfrak{F}_1$可測
    - X=1 or -1
    - E(W|X=1)=2×0.5+0×0.5=1=X
    - E(W|X=-1)=-2×0.5+0×0.5=-1=X
  - → E(W|$\mathfrak{F}_1$)=X ← 需爲 $\mathfrak{F}_1$ 可測

| | 正 | 反 |
|---|---|---|
| 紅 | X=1,Y=1, W=2 | X=-1,Y=1,W=0 |
| 綠 | X=1,Y=-1, W=0 | X=-1,Y=-1,W=-2 |

# 課堂練習:條件期望值

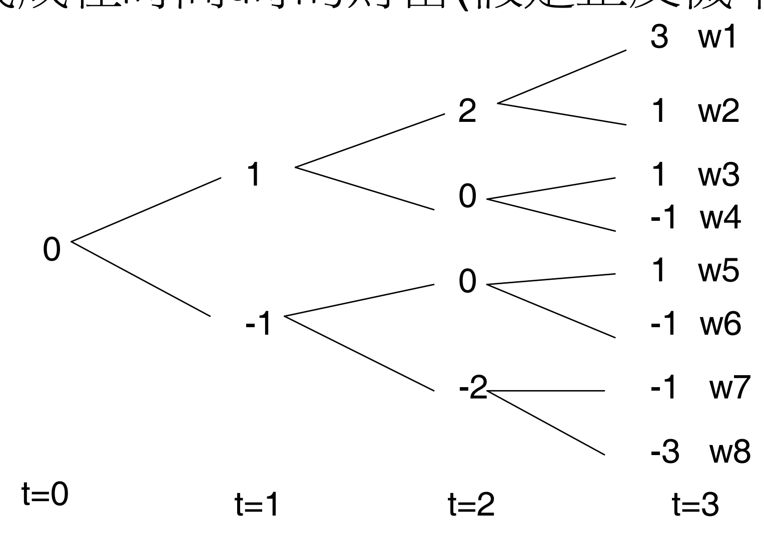
- 文盲的資訊集合可用資訊集合$\mathscr{F}_2$表示
  - $F_2=\{\Omega,\phi,$ {“紅正”,“紅反”}, {“綠正”,“綠反”}}
  - $E(W|F_2)=?$

| | 正 | 反 |
|---|---|---|
| 紅 | X=1,Y=1,　W=2 | X=-1,Y=1,W=0 |
| 綠 | X=1,Y=-1, W=0 | X=-1,Y=-1,W=-2 |



# 隨機過程

- 隨機過程:$S(t,w)$可視爲由一串隨機變數構成的序列的集合
  - t:時間,　w: 隨機項(發生事件)
- 以丟銅板爲例,正面贏一塊,負面輸一塊, S(0)=0, S(t)定義成在時間t時的財富(假定正反機率相等)




每一個事件w描述了三次擲銅板輸贏的狀況
Ex: w1代表三次擲銅板都贏的狀況

# 隨機過程S(t,w)的特性

- 隨機過程S(t,w)的特性
  - 固定時間點t, S(t,w)是隨機變數
    - Ex: S(1)= 1 or -1 with probability ½
    - 期望值計算: E(S(1))= $1\times 0.5+(-1)\times 0.5=0$
    - 變異數計算:Var(S(1))= $(1-0)^2\times 0.5+(-1-0)^2\times 0.5=1$
  - 固定事件 w, S(t,w)是時間的函數
    - Ex: S(1,w1)=1, S(2,w1)=2; S(3,w1)=3



# 定義隨機過程S(t,w)的機率空間

- 令 機率空間 P(Ω,$\mathscr{F}$, u)
  - Ω={w1,w2,w3,w4,w5,w6,w7,w8}
  - 如何表現 $\mathscr{F}$ ?
    - 玩家在不同的時間點上得到不同的資訊
      - t=1 → 得知 S(1)
      - t=2 → 得知 S(1) 和 S(2)
      - t=3 → 得知 S(1) , S(2) 和 S(3)
    - 應該用不同的σ-algebra表示不同時間點的資訊
      - 定義$F_t$ 爲到時間t時,參賽者所得的資訊總合
      - 時間t所得的資訊量,大於或等於時間t-1資訊量

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3$$

# 不同時間的資訊集合表示

- Ex: F1= $\{\sigma(S(1))\}$, F2=$\{\sigma(S(1),S(2))\}$,F3= $\sigma\{(S(1),S(2),S(3))\}$
  - F1={{w1,w2,w3,w4}{w5,w6,w7,w8}{w1,w2,w3,w4,w5, w6,w7,w8 }, ϕ}
  - F2={{w1,w2},{w3,w4}{w5,w6},{w7,w8}

  {w1,w2,w3,w4}{w1,w2,w5,w6},{w1,w2,w7,w8},{w3,w4,w5,w6},{w3,w4,w7,w8},{w5,w6,w7,w8}, {w1,w2,w3,w4,w5,w6}, {w1,w2,w3,w4,w7,w8 }, {w1,w2,w5,w6,w7,w8 }, {w3,w4,w5,w6,w7,w8 }, {w1,w2,w3,w4,w5,w6,w7,w8 }, ϕ}
  - F3 has 64($=2^8$) elements
  - Obviously, $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3$



# Filtration

- $\mathscr{F}$={F1, F2, F3} 稱爲 Filtration
  - 描述不同時間點資訊集合的變化
- 隨機過程S(t)可用機率空間 P(Ω,$\mathscr{F}$, u)表示
  - S(t) is adapted to $\mathscr{F}$
    - 在時間t時,參賽者已知S(t)
    - 也可說, S(t)爲 Ft 可測

# Martingale

- $E(S(2)|\mathrm{F}_1) = E(S(2)|\sigma(S(1))) = S(1)$ ,since
  - $E(S(2)|S(1)=1) = 1 = S(1)$
  - $E(S(2)|S(1)=-1) = -1 = S(1)$
- Martingale定義：
  - S(t) is adapted to $\mathscr{F}$
  - 假定 $u \le t$ ,則 $E(S(t)|\mathrm{F}_u) = S(u)$
  - 假定 $a \in \mathrm{F}_u$ ,則 $E(aS(t)|\mathrm{F}_u) = aE(S(t)|\mathrm{F}_u) = aS(u)$
- 上述的S(t)就是一個 martingale process
- 意義: 公平的遊戲



# 課堂練習: martingale

- 求下列期望值:

$E(S(3)|\mathrm{F}_1)$

$E(E(S(3)|\mathrm{F}_2)|F_1)$

$E(E(S(3)|\mathrm{F}_1)|F_2)$

# Markov Process

- $P(S(3)=1 \mid S(1)=1, S(2)=0) = P(S(3)=1 \mid S(2)=0) = 0.5$
- $P(S(3)=1 \mid S(1)=-1, S(2)=0) = P(S(3)=1 \mid S(2)=0) = 0.5$
  - Note that F2= $\{\sigma(S(1), S(2))\}$
  - It seems that $P(S(3)=1 \mid F_2) = P(S(3)=1 \mid S(2))$
- Markov process 定義
  - 當隨機過程現在的狀態已知,則該過程未來行爲和該過程的過去行爲彼此獨立
  - $P(X(t+s) \le y \mid F_t) = P(X(t+s) \le y \mid X(t))$
  - 意義:現在價格完全反映市場已知的訊息



# 無套利機會和風險中立機率

- 證明在無套利機會下,風險中立機率存在
  - 風險中立機率可用來求衍生性金融商品的價格
  - 定義市場模型及投資策略定義
  - 無套利機會的數學定義
  - 利用Martingale來證明風險中立機率存在

# 市場架構及投資策略

- 假定一個T期的市場模型, 市場上有兩種資產:
  - 股票: S(t)是在時間t的價格 (t=0,1,2…, T)
  - 無風險資產: B(t)是在時間t的價格= $(1+r)^t B(0)$
- 令(a(t),b(t))爲在時間t-1決定的投資策略($F_{t-1}$可測),並執行到時間t
  - a(t):股票單位數, b(t):無風險資產單位數
- 投資組合從時間t-1到t價值的變化量

$$a(t)S(t)+b(t)B(t)-a(t)S(t-1)-b(t)B(t-1)$$
$$=a(t)\Delta S(t)+b(t)\Delta B(t)$$

- 從時間0到t的總損益: $G_i=\sum_{i=1}^{t}(a(i)\Delta S(i)+b(i)\Delta B(i))$



# 投資策略的特性

- 投資策略必須滿足self finance 的特性
  - a(t)S(t)+b(t)B(t)=a(t+1)S(t)+b(t+1)B(t)
  - 投資策略在時間t的價値V(t)
    - $V(t)=V(0)+G(t)$
- 投資策略的價值不能爲負
  - Remark: The strategy is called admissible
- Lecture 1討論多期二元樹下的動態避險策略,符合上述要求,並且能完全複製選擇權的現金流量

# 套利機會的數學定義

- 套利機會存在,代表存在一admissible策略, V(0)=0, E(V(T))>0.
  - P(V(T)>0)>0→E(V(T))>0 (注意: V(T)不爲負數)
  - Thus E(V(T))=0 →P(V(T)>0)=0
- 定理**:** 假定存在一機率測度Q,
    - 折現的股票價格過程 Z(t)=(S(t)/B(t))爲Q-martingale
  - 則對於任意admissible 交易策略的價格過程 V(t)
    - V*(t)=(V(t)/B(t)) 爲 Q-martingale
  - Remark: Q就是之前所提的風險中立機率



# 定理證明:

## 交易策略折現價值(V*(t))是 Q-martingale

$$\mathrm{E_Q}(V^*(t+1) \mid F_t) = \mathrm{E_Q}(\frac{V(t+1)}{B(t+1)} \mid F_t)$$

$$= \mathrm{E_Q}(a(t+1)Z(t+1) + b(t+1) \mid F_t)$$

$$= a(t+1)\mathrm{E_Q}(Z(t+1) \mid F_t) + b(t+1)$$

a(t+1) 和b(t+1)在時間t 已知

$$= a(t+1)Z(t) + b(t+1)$$

$$= a(t)Z(t) + b(t) \leftarrow \text{Self-finance}$$

$$= V^*(t)$$

# 上述定理和無套利的關係

- 假定市場真實機率是Q
  - 則V(0)=0 $\rightarrow E_Q(V(T)) = 0 \rightarrow Q(V(T) = 0) = 1$
  - 隱含無套利,然而市場上真實機率不應爲Q
    - Q隱含了(S(t)/B(t))爲Q-martingale
- 定義P 和Q equivalent $\rightarrow$P(A)=0 iff Q(A)=0
- 假定市場真實機率爲P,如P 和Q equivalent,
  - $Q(V(T) = 0) = 1 \Leftrightarrow P(V(T) = 0) = 1$
    - 可推出真實市場上無套利機會
- 假定真實市場無套利機會,Q可用Radon-Nikydom 定理求得



# 如何使用風險中立機率評價

- 假定有一組投資策略(a(t),b(t)),可複製出選擇權在到期日的payoff(=V(T))
  - 該投資策略期初成本=V(0)=a(1)S(0)+b(1)B(0)
- 從上述定理知:

$$E_Q(\text{選擇權折現}Payoff \mid F_0) = E_Q(V^*(T) \mid F_0) = V^*(0) = V(0)$$

- 假定利率爲定值,選擇權到期的payoff=C(T),上式可化簡成 $e^{-rT}E_Q(C(T))$
- For further reference:
  - Klebaner, F. C., *Introduction to Stochastic Calculus with Application*. Chapter 11.