使用格子樹模型評價

戴天時

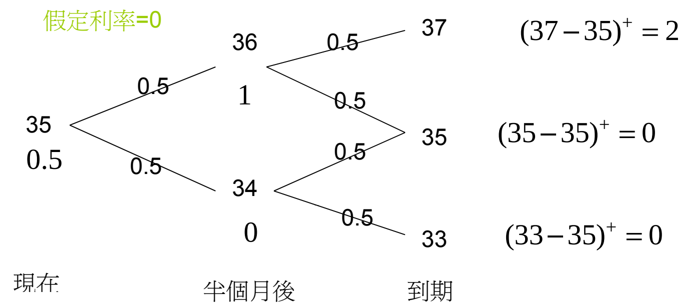
授課大綱

- 如何使用格子樹評價金融商品
  - 後推法和避險策略的關聯
  - 處理American-style features (提前履約.贖回)
  - 新奇選擇權的評價
- 格子樹的建構
- 修改格子樹模型縮減評價誤差
  - Ritchken model
  - BTT model
- 利率樹,
- 雙變數立體樹結構

使用格子樹評價的原理

- 假定在市場上無套利機會,且market is complete
  - 存在唯一的風險中立機率 Q
- 在這種市場中,商品的評價可用取期望值的方式化簡
  - 假定有一個商品在到期日T時的報酬為C(T),利率為r
  - 在時間t時,該商品的價格為: $e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{C(T)})$
  - 以一個履約價格為X,標的物價格為S(t)的賣權為例
    - 賣權價格= $e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}((\mathrm{X}-\mathrm{S(T)})^{+})$
- 如果有一個格子樹可模擬在風險中立機率下,標的物價格的變化
  - 藉由該數值模型,可求出衍生物報酬的期望值→商品價格

使用風險中立機率處理多期格子樹模型下的選擇權評價問題

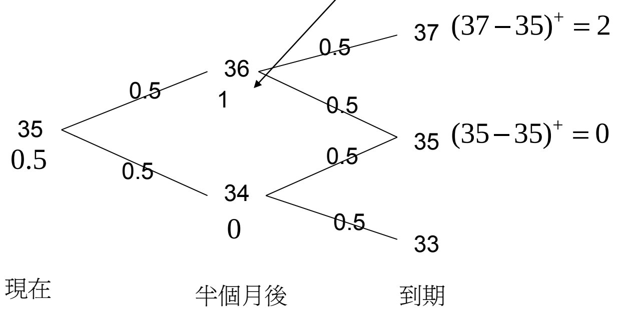


- $e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{S(T)})=\mathrm{S(t)}$ 36*0.5+34*0.5=35
- 選擇權的價格= 0.5
- 從最後一期倒推的做法: Backward Induction

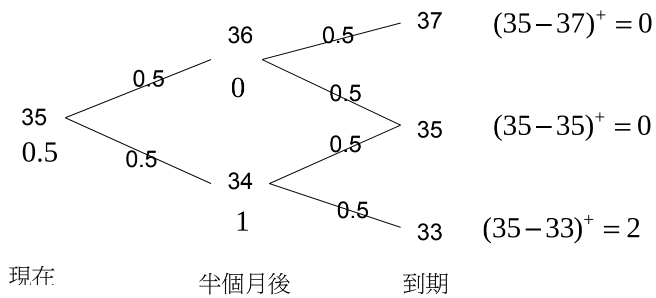
選擇權評價和避險策略的關係

- Option writer在不同時間點的避險策略
  - x Asset, y Dollars
    - 37x+y=2 → x=1, y=-35
    - 35x+y=0

借$35 持有1unit of Asset的成本爲1



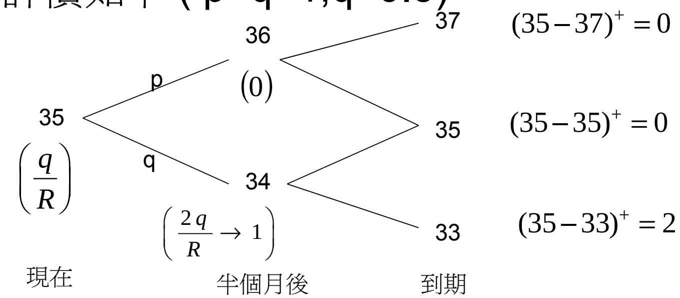
使用格子樹模型評價賣權



- 假定履約價格爲35元
- 修改最後一期的報酬,再做backward induction.

美式選擇權的評價

- 美式選擇權可在到期日前提前履約
  - 在每一個節點上都必需判斷是否提前履約
- 假定一期的折現率用R(>1)表示,美式賣權可評價如下 (p+q=1,q<0.5)



在格子樹模型上評價新奇選擇權

- 新奇選擇權的價格常會受標的物的價格路徑而影響
  - 重設選擇權(Reset option):履約價格會在標的物價格碰到某一界限時重設

$$\text{payoff} = \begin{cases} (S(T)-X)^+ & \text{if } S(t)\geq H \ \ \forall t\in(0,T) \\ (S(T)-B)^+ & \text{if } \exists t\in(0,T)\ S(t)<H \end{cases}$$

  - 回顧型選擇權(Lookback option):履約的payoff受標的物歷史最高或最低價影響

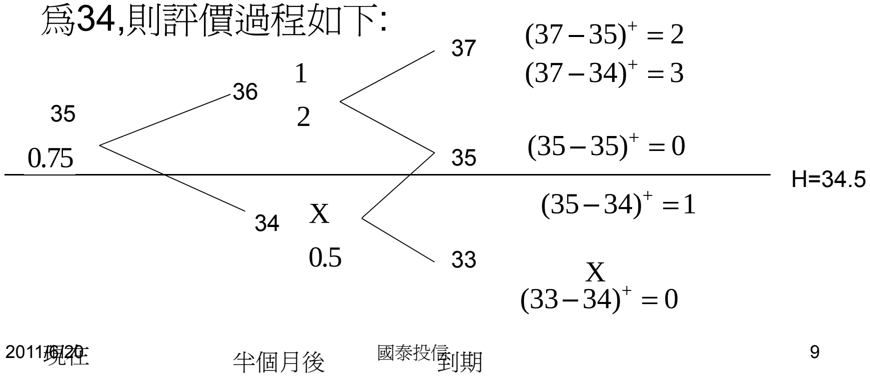
$$S^*(T) = \max(S(t), t \in (0,T))$$

$$\text{payoff} = (S^*(T) - X)^+$$

- 在格子樹模型上,可在每個節點上加上適當的狀態變數,來記憶不同狀況下的選擇權價格

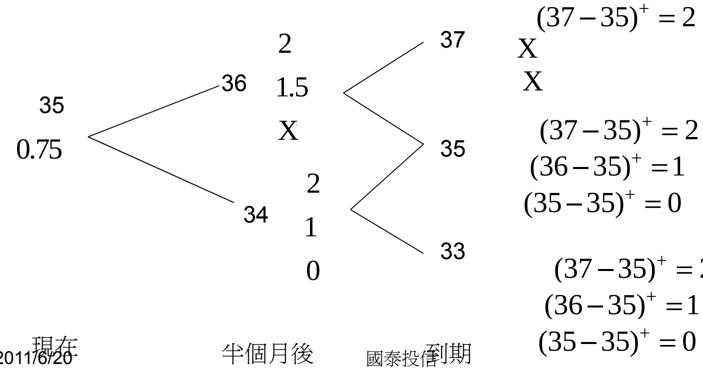
重設買權評價

- 選擇權在時間t的價格,受到標的物價格在時間t之前是否碰觸預設價格H影響→每個節點最多需放入兩個狀態變數
- 以上述選擇權爲例,假定H=34.5,重設的履約價格爲34,則評價過程如下:



回顧型賣權評價

- 選擇權在時間t的價格,受到標的物價格在時間t之前曾經到達的最高價格影響
- 以上述兩期的二元樹爲例,可能最高價格爲35,36,37 →每個節點最多需放三個狀態變數

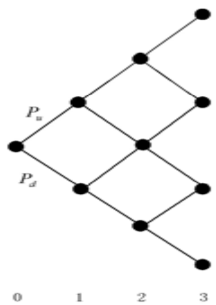


數值模型的基本架構

- 假定標的物的隨機過程遵守幾何布朗隨機過程 (Geometric Brownian motion)
  - $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$
  - 可推得 $S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}$
- 在風險中立機率下,標的物的期望報酬率爲無風險利率r,所以上式中: $\mu = r$
- 建構n期樹狀模型, 當 $n \to \infty$
  - 樹狀結構模擬的標的物價格過程收斂到幾何布朗隨機過程

二元樹模型

- 回顧二元樹的架構:
  - 右圖爲三期的模型
  - 每一期價格只能上升或下降
  - 假定上升變 e^u 倍
    - 機率爲 P_u
  - 假定下降變 e^d 倍
    - 機率爲 P_d
- 第n期的標的物價格可寫成 $S(0)e^{W(n)}$
  - $W(n) = I_1 + I_2 + ... + I_n$
  - $I_i = u$ or d

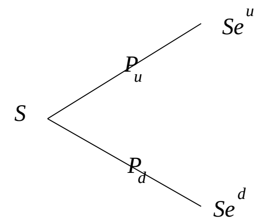


二元樹模型的建立

- 假定$I_1, I_2, \ldots, I_n$獨立,則根據中央極限定理,當 $n \to \infty$
  - W(n)會逼近常態分配
- 標的物價格過程:$S(T) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma B(T)}$
  - $E(W_n) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$
  - $\mathrm{Var}(W_n) = \sigma^2 T$
- 所以 $I_1, I_2, \ldots, I_n$ 要滿足下列條件:
  - $\Delta t \equiv \frac{T}{n}$
  - $E(I_n) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$
  - $\mathrm{Var}(I_n) = \sigma^2 \Delta t$

二元樹模型的建立

- 考慮單期模型:
  - $P_u \times u + P_d \times d = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t \equiv m$
  - $P_u \times (u-m)^2 + P_d \times (d-m)^2 = \sigma^2 \Delta t$
  - $P_u + P_d = 1$



- 三個方程式,但是有四個未知數,可根據對評價的模型的要求加入不同等式
  - CRR model: $e^u \times e^d = 1$
    - Remark:在CRR模型設定中,為了公式簡化,

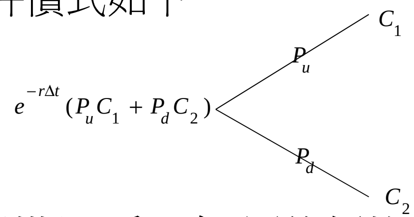
$$P_u \times (u-m)^2 + P_d \times (d-m)^2 \to \sigma^2 \Delta t$$

建立CRR model

- 在CRR模型中,參數設定如下:
  - $u = \sigma\sqrt{\Delta t}$ $\quad d = -\sigma\sqrt{\Delta t}$
  - $P_u = \frac{e^{r\Delta t} - e^d}{e^u - e^d}$ $\quad P_d = 1 - P_u$
- 考慮一個兩期的模型, T=1(year), r=5%,標的物的波動率為30%,標的物的初始價格=100
  - 使用Excel計算上述參數 (見CRR.xls)
  - 作出該兩期的CRR模型,計算標的物在每個節點的價格

用CRR模型評價

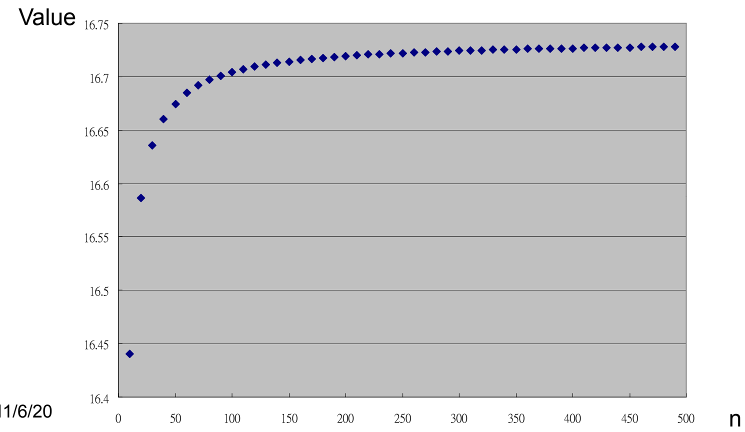
- 使用風險中立機率評價:$e^{-rT}\mathrm{E_Q}(\mathrm{C(T)})$
- 套用上述式子,可得評價式如下



- 假定有一歐式買權,到期日為一年,履約價格=120,利用剛剛求出的二期模型,可計算買權價格=8.012012

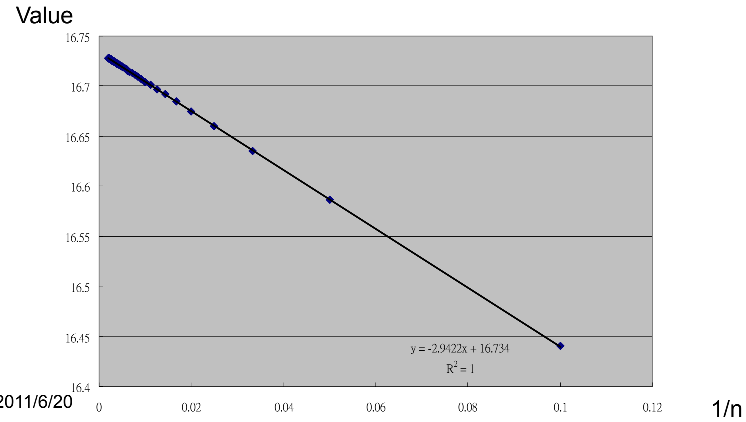
評價收斂

- 隨著期數增加, 評價結果收斂到公式解
  - S=100，T=1，X=100，r=0.1，Vol.=0.3，BS-Formula=16.734134。(見CRRConvergence.xls)



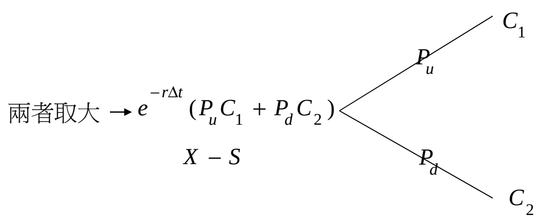
使用外插法估計n→∞評價結果

- Forsyth, Vetzal,和 Zvan (2002)指出樹狀評價模型的評價誤差會以O(1/n)的速率收斂



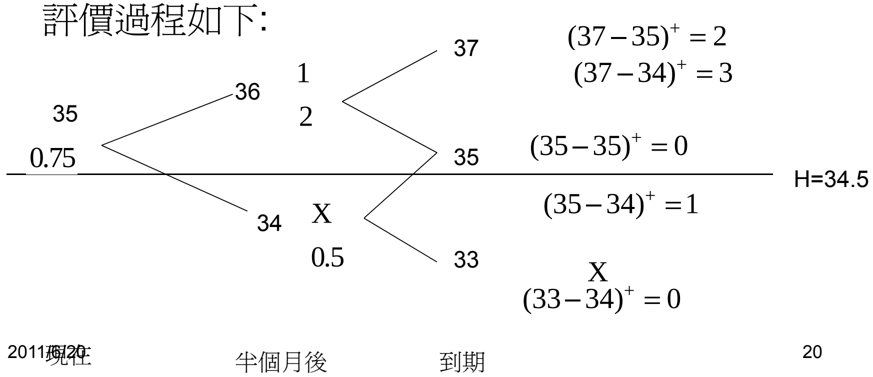
美式賣權的評價

- 美式選擇權可在到期日前提前履約
  - 在每一個節點上都必需判斷是否提前履約
  - 程式驗證: 美式選擇權價格≥歐式選擇權
  - (見CRR.xls)



新奇選擇權評價:重設選擇權爲例

- 選擇權在時間t的價格,受到標的物價格在時間t之前是否碰觸預設價格H影響→每個節點最多需放入兩個狀態變數
- 以下圖爲例,假定H=34.5,重設的履約價格爲34,則評價過程如下:



重設選擇權評價程式的原理

- 參見 Reset.xls,用來評價重設選擇權
  - B(重設後的履約價格), H(重設界限)
  - 每個節點N[i]有兩個狀態變數

    N[i][0]→未重設的選擇權價格

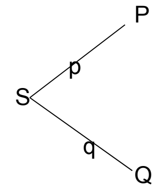
    N[i][1]→重設後的選擇權價格
  - 最後一期的價格

    N[i][0]=Max(到期日標的物價格-X,0);

    N[i][1]=Max(到期日標的物價格-B,0);
  - 修改Backward induction
    - 分別考慮節點i的價格大於和小於H的處理 (See next slide)

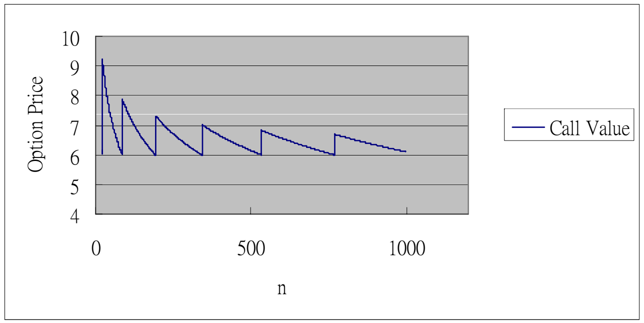
重設選擇權評價程式的原理

- Case 1: S<=H
  - N[i][0] → Useless
  - N[i][1]= $\frac{p\times V(P,1)+q\times V(Q,1)}{R}$
- Case 2: Q<=H<S
  - N[i][0]= $\frac{p\times V(P,0)+q\times V(Q,1)}{R}$
  - N[i][1]= $\frac{p\times V(P,1)+q\times V(Q,1)}{R}$
- Case 3:Otherwise
  - N[i][0]= $\frac{p\times V(P,0)+q\times V(Q,0)}{R}$
  - N[i][1]= $\frac{p\times V(P,1)+q\times V(Q,1)}{R}$



鋸齒狀的收斂行為

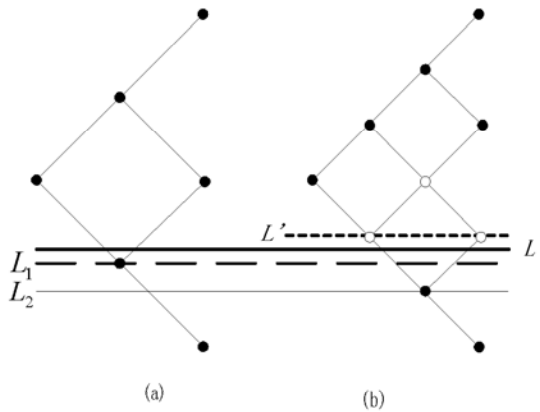
- 以CRR來評價障礙選擇權
  (S=95,X=100,T=1,volitility=25%,r=10%,H=90)



- 如何改善？
  - 誤差來自何處？

使用二元樹模型評價造成誤差原因

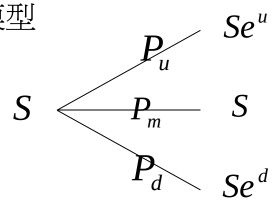
- 有效障礙隨n而改變



如何建構一個樹狀結構,使得有效障礙不隨n而改變?

使用Kamrad & Ritchken 三元樹模型評價障礙選擇權

- 由Kamrad and Ritchken [1991] 提出
- 是一個擁有延伸參數 $\lambda(\geq 1)$ 的三元樹模型
- 模型的設定：
  - $e^{u} = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$
    $e^{m} = e^{0} = 1$
    $e^{d} = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$



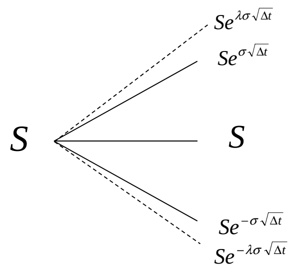
- 標的物價格過程: $S(T) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma B(T)}$
  - 由三元樹來模擬標的物的價格→三元樹的期望值和變異數要符合標的物價格過程的期望值和變異數
  - $p_u(\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}) + p_d(-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}) = (r - 1/2\sigma^2)\Delta t$
    $p_u(\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2 + p_d(-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2 = \sigma^2\Delta t$

兩個變數 p_u, p_d ,兩個方程式

使用Kamrad & Ritchken 三元樹模型評價障礙選擇權

- 再加上 $p_u + p_m + p_d = 1$ 條件
  - 可得到 $(\alpha \equiv r - \frac{1}{2}\sigma^2)$

$$P_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}$$
$$P_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$P_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}$$



- Ritchken[1995] 透過Kamrad & Ritchken三元樹模型中參數 λ 的適當選取，使三元樹模擬的標的物價格S(t)能恰恰好落在障礙價格H上

三元樹的建立及評價

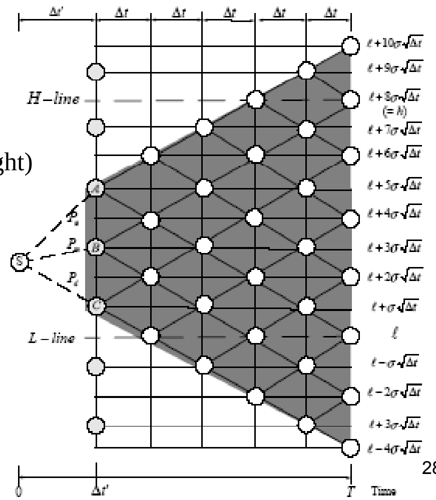
$$\lambda = \frac{\frac{\ln(S/H)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\left\lfloor \frac{\ln(S/H)}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right\rfloor}$$

- 評價方法請參見 Barrier.xls

An Overview of bBTT

- Simple: (2 parts)
  - 1-time-step trinomial tree
  - truncated CRR tree
- Flexible:
  - adjustment of cell width (height)
  - position of the grid
  - Hit both barriers

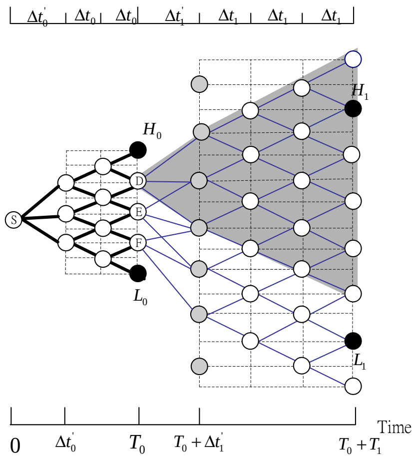
A double barrier options with barriers H and L



An Overview of BTT

- To match more critical lcoations:
  - Integrate bBTT
    - In thick edge
    - in shadow
- Four critical locations: H0, H1, L0 and L1

A discrete barrier option



Construct bBTT

The Underlying Grid

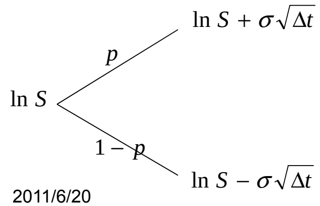
Step 1:

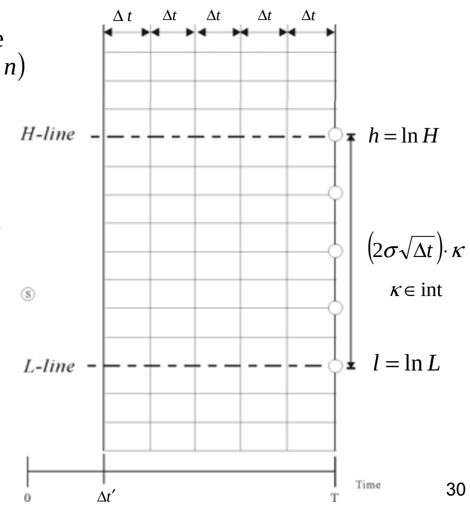
a. If we want to build up an n-step bBTT, find out Δt that is close to, but does not exceed $\Delta\tau(=T/n)$ that makes $\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$ an integer.

$$\kappa \equiv \left\lceil \frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}} \right\rceil \qquad \Delta t = \left(\frac{h-l}{2\kappa\sigma}\right)^2$$

$$\Delta t \le \Delta t' < 2\Delta t$$

b. properly layout the grid.





Construct bBBT

The Trinomial Structure

Step 2:

a. Choose node A, B, C at time $\Delta t'$ to make P_u , P_m , and P_d valid.

b. The mean and variance of log-stock price from S at $\Delta t'$

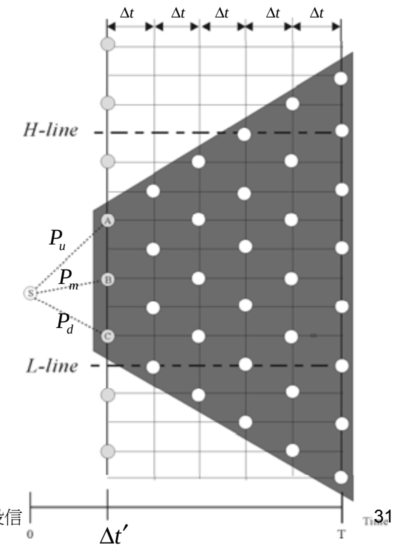
$$\ln\frac{S_{\Delta t'}}{S_0} = \left(r-0.5\sigma^2\right)\Delta t' + \sigma dW_{\Delta t'}$$

Let $\mu \equiv (r-\sigma^2/2)\Delta t'$

c. We choose the only node lies in $\left[\mu-\sigma\sqrt{\Delta t}, \mu+\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$ as B

$$\beta = \hat{\mu} - \mu \qquad \alpha = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$\gamma = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$



Construct the bBTT

Derive the Branch Probabilities

By matching mean and variance and summing 3 probabilities to be one, we can solve P_u , P_m , and P_d .

$$P_u\alpha + P_m\beta + P_d\gamma = 0$$

$$P_u\alpha^2 + P_m\beta^2 + P_d\gamma^2 = Var$$

$$P_u + P_m + P_d = 1$$

Construct the bBTT

Branch Probabilities are Valid!

$$\det = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) < 0,$$

$$\det_u = (\beta\gamma + \mathrm{Var})(\gamma-\beta),$$

$$\det_m = (\alpha\gamma + \mathrm{Var})(\alpha-\gamma),$$

$$\det_d = (\alpha\beta + \mathrm{Var})(\beta-\alpha).$$

Thus, $P_u = \det_u/\det$, $P_m = \det_m/\det$, and $P_d = \det_d/\det$

Verify that $P_u, P_m, P_d > 0$.

Construct the bBTT

Branch Probabilities are Valid!

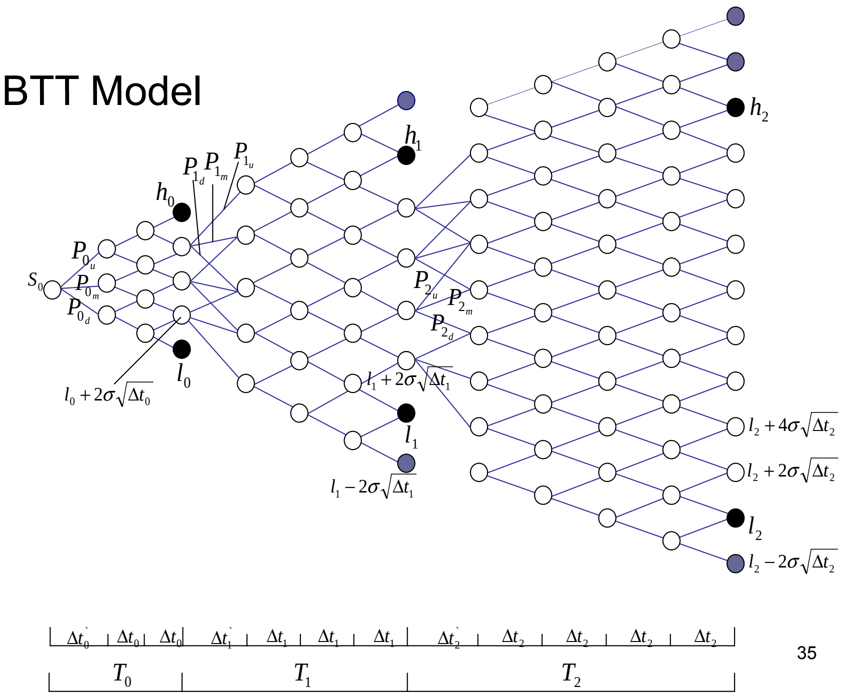
Show that det$_u$, det$_m$, and det$_d$ <0 instead.

$$\beta\gamma + \mathrm{Var}(\Delta t') = \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t' \geq \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t = (\beta - \sigma\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0,$$

$$\alpha\gamma + \mathrm{Var}(\Delta t') = \beta^2 - 4\sigma^2\Delta t + \sigma^2\Delta t' \leq \beta^2 - 4\sigma^2\Delta t + 2\sigma^2\Delta t = \beta^2 - 2\sigma^2\Delta t \leq 0,$$

$$\alpha\beta + \mathrm{Var}(\Delta t') = \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t' \geq \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t = (\beta + \sigma\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0,$$

BTT Model



Numerical Results

- Pricing a down-and-out single barrier call
  - Efficiency/accuracy

Time (sec)	Ritchken		Lyuu		TBT	
	n	Value	n	Value	n	Value
0.001	100	5.9997	1000	6.1002	500	5.9980
0.002	125	5.9985	2000	6.1449	1000	5.9975
0.004	200	5.9986	4000	6.0998	2000	5.9972
0.008	250	5.9980	8000	6.1445	4000	5.9970
0.016	400	5.9977	16000	6.0829	8000	5.9969
True Value 5.9968						

$S_0 = 95$, $X = 100$, $r = 10\%$, $\sigma = 25\%$, $T = 1$, $L = 90$.

短利模型利率樹建構
短利模型

- r(t):在時間t的瞬時利率
- 於時間0在帳戶存1元,到時間t的價值可表爲

$$\beta(t)=\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

- 假定Q:風險中立機率, Ft:到時間t所知道資訊集合
  - 則 $\frac{P(t,T)}{\beta(t)}$ 爲 martingale process.

$$E_Q\left(\frac{P(T,T)}{\beta(T)}\mid F_t\right)=\frac{P(t,T)}{\beta(t)}$$

短利模型
債券價格,殖利率和短利的關係

- 已知 $E_Q\left(\frac{P(T,T)}{\beta(T)}\mid F_t\right)=\frac{P(t,T)}{\beta(t)}$
- 令 P(T,T)=1.

$$P(t,T)=E_Q\left(\frac{\beta(t)}{\beta(T)}\mid F_t\right)=E_Q\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\mid F_t\right)$$

$$P(t,T)=\exp(-R(t,T)\times(T-t))$$

$$\Rightarrow R(t,T)=-\frac{\log(P(t,T))}{T-t}$$

- R(t,T)可視爲時間t,T之間短利的“平均”

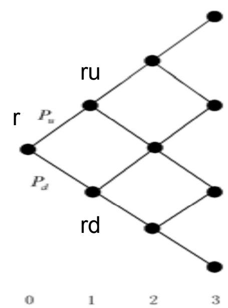
短利模型的種類

- Equilibrium model:
  - 對經濟模型做出假設,進而推出短利的隨機過程
  - 短利隨機過程決定→決定利率期限結構
  - Rendleman & Bartter model
  - Vasicek model→ Hull-White model爲其推廣
  - CIR model
- No arbitrage model:
  - 通常爲Equilibrium model的推廣
  - Introduced later

Equilibrium model

Rendleman & Bartter :

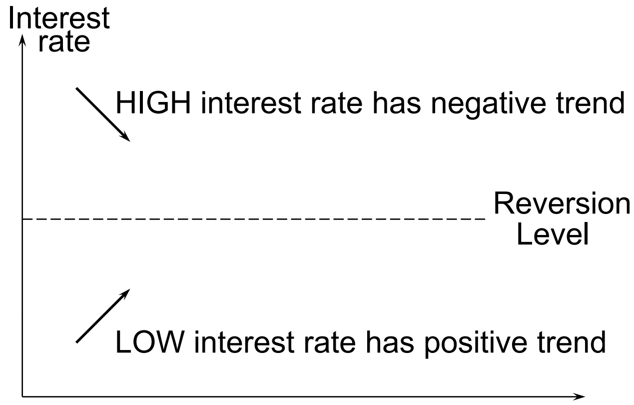
$$dr(t)=\mu r(t)\,dt+\sigma r(t)\,dW(t)$$



- 假定短利服從對數常態分配
- 可使用二元樹評價

$$P(0,2\Delta t)=e^{-r\Delta t}\left(P_u e^{-ru\Delta t}+P_d e^{-rd\Delta t}\right)$$

Mean Reversion Property



- Rendleman & Bartter model 沒有這個特性

Equilibrium model

Vasicek :

$$dr(t) = b(a - r(t))\,dt + \eta\,dW(t)$$

- a: 平均利率水準
- b: 返回平均利率水準的速度
- Hull-White 模型爲Vasicek 模型推廣
- 無法fit 市場的利率期限結構

No-arbitrage model 簡介

- No arbitrage model:
  - 包含Equilibrium model的性質
  - 市場的利率結構當作輸入的參數
  - 造出來利率結構和市場觀察到的結構相符

  - Ho-Lee Model
  - Hull-White Model

No-arbitrage model

- Ho and Lee 模型
  - $dr(t) = \theta(t)dt + \eta\, dW(t)$
  - 短利呈常態分配→易於推導債券和選擇權價格
  - $\theta(t)$和利率期限結構相關 $\theta(t) = F_t(0,t) + \eta^2 t$
  - F(0,t):在時間0看時間t的瞬時遠期利率
  - 不具備mean reversion 的特性

No-arbitrage model

- Hull-White Model
  - $dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \eta\, dB_2(t)$
  - 短利呈常態分配→易於推導債券和選擇權價格
  - 具備mean reversion 的特性
  - $\theta(t)$和利率期限結構相關

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\eta^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

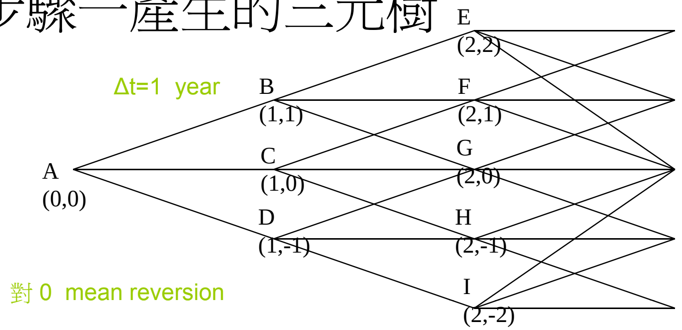
  - 本文將介紹如何建構Hull-White利率樹,

Hull-White 三元樹理論及模型的建構

- $dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \eta\, dB_2(t)$
- 假定在Δt時間的利率R服從上述分配
  - Δt 為三元樹一期的時間長度
  - $dR(t) = [\theta(t) - aR(t)]dt + \eta\, dW(t)$
- 分成下述兩個步驟:
  - $dR^*(t) = -aR^*(t)dt + \eta\, dW(t)$ ($\theta(t) = 0$ and $r(0) = 0$)
    - *建構出三元樹*
  - $\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$
    - 計算三元樹每個時間點所要平移的利率量
    - 藉此fit真實世界的利率結構

步驟一產生的三元樹

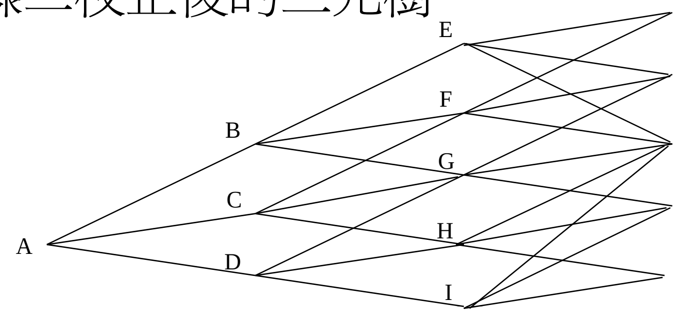
jmax=2



Node	A	B	C	D	E	F	G	H	I
R	0.000%	1.732%	0.000%	-1.732%	3.464%	1.732%	0.000%	-1.732%	-3.464%
p_u	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Let a=0.1 σ=0.01

步驟二校正後的三元樹



平移3.824% 平移6.252%

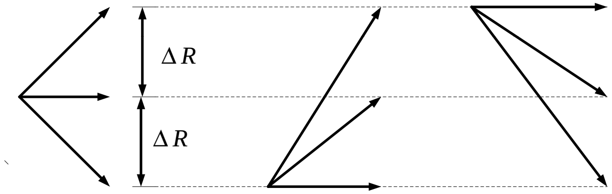
Node	A	B	C	D	E	F	G	H	I
R	3.824%	6.937%	5.205%	3.473%	9.716%	7.984%	6.252%	4.520%	2.788%
p_u	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

平移5.205%

步驟一

決定三元樹結構

- 設定垂直間距距離 $\Delta R = \eta\sqrt{3\Delta t}$
- 設定距離中心最長間距 $j_{\max}$ =[0.184/($a\Delta t$)]
  - mean reversion
  - Branch 種類:



(a) (b) (c)

步驟一

決定分支機率: Type A node

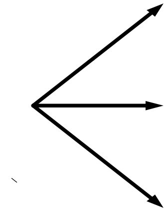
$dR^*(t) = -aR^*(t)dt + \eta\, dB_2(t)$

$$p_u\Delta R - p_d\Delta R = -aj\Delta R\Delta t$$ match mean and variance

$$p_u\Delta R^2 + p_d\Delta R^2 = \sigma^2\Delta t + a^2 j^2\Delta R^2\Delta t^2$$

$$p_u + p_m + p_d = 1$$

Ex: Node B,F → j=1
Node C,G → j=0
Node D,H → j=-1



(a)

步驟一

決定分支機率: Type B node

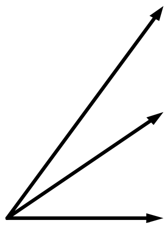
$dR^*(t) = -aR^*(t)dt + \eta\, dB_2(t)$

$$p_u 2\Delta R + p_m\Delta R = -aj\Delta R\Delta t$$ match mean and variance

$$p_u 4\Delta R^2 + p_m\Delta R^2 = \sigma^2\Delta t + a^2 j^2\Delta R^2\Delta t^2$$

$$p_u + p_m + p_d = 1$$

Ex: Node I → j=-2



(b)

步驟一

決定分支機率: Type C node

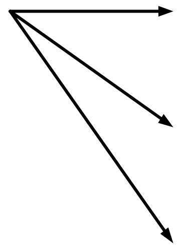
$dR^*(t) = -aR^*(t)dt + \eta\, dB_2(t)$

$$-p_m\Delta R - 2p_d\Delta R = -aj\Delta R\Delta t$$ match mean and variance

$$p_m\Delta R^2 + 4p_d\Delta R^2 = \sigma^2\Delta t + a^2 j^2\Delta R^2\Delta t^2$$

$$p_u + p_m + p_d = 1$$

Ex: Node E → j=2



(c)

步驟二
計算每個時間點平移的利率量

- 給定市場利率期限結構

Maturity (year)	Rate%
1	3.824
2	4.512
3	5.086

  - 經校正後的Hull-White tree其隱含利率結構和市場利率結構符合
  - 計算第i期的利率平移量α_i

步驟二
計算Q_{ij}和α_i

- 令 Q_{ij} 代表走到Node(i,j)付$1 的現值
  - Q_{00} =1
- α_0 =3.824%,
  - $$Q_{11}=0.1667e^{-0.03824}=0.1604$$
    $$Q_{10}=0.6666e^{-0.03824}=0.6417$$
    $$Q_{1-1}=0.1667e^{-0.03824}=0.1604$$
  - 計算α_1

B點短利$:\alpha_1+\Delta R$

C點短利$:\alpha_1$

D點短利$:\alpha_1-\Delta R$

步驟二
計算Q_{ij}和α_i

$$Q_{11}e^{-(\alpha_1+\Delta R)}+Q_{10}e^{-\alpha_1}+Q_{1-1}e^{-(\alpha_1-\Delta R)}=e^{-0.04512\times 2}$$

$$e^{-\alpha_1}\left(Q_{11}e^{-\Delta R}+Q_{10}+Q_{1-1}e^{\Delta R}\right)=e^{-0.04512\times 2}$$

- 依此類推→ 求 Q_{2j}→求α_2 ……

$$Q_{22}=Q_{11}\times e^{-(\alpha_1+\Delta R)}\times 0.1217$$

$$Q_{21}=Q_{11}\times e^{-(\alpha_1+\Delta R)}\times 0.6566+Q_{10}\times e^{-(\alpha_1)}\times 0.1667$$

$$Q_{20}=Q_{11}\times e^{-(\alpha_1+\Delta R)}\times 0.2217+Q_{10}\times e^{-(\alpha_1)}\times 0.6666+Q_{1-1}\times e^{-(\alpha_1-\Delta R)}\times 0.2217$$

$$Q_{2-1}=Q_{10}\times e^{-(\alpha_1)}\times 0.1667+Q_{1-1}\times e^{-(\alpha_1-\Delta R)}\times 0.6566$$

$$Q_{2-2}=Q_{1-1}\times e^{-(\alpha_1-\Delta R)}\times 0.1217$$

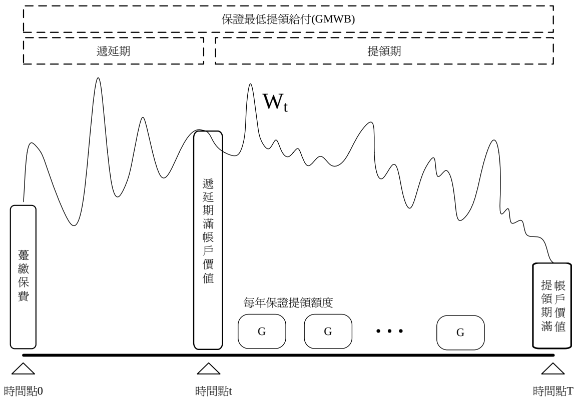
$$Q_{22}e^{-(\alpha_2+2\Delta R)}+Q_{21}e^{-(\alpha_2+\Delta R)}+Q_{20}e^{-\alpha_2}+Q_{2-1}e^{-(\alpha_2-\Delta R)}+Q_{2-2}e^{-(\alpha_2-2\Delta R)}=e^{-0.05086\times 3}$$

雙變數立體樹的建立

- 處理雙隨機過程
- 以GMWB (Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits)為例
  - 帳戶資產價值
  - 利率
- 模擬資產隨機過程
- 處理非線性誤差

GMWB 商品簡介

- GMWB
  - Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit



- 遞延期
  - 複利增值
  - 鎖高機制
  - 保本
- 提領期
  - 保證提領額度
- 支付公平費用率 α

帳戶價值建立及和短利的關係

- 帳戶價值W_t符合幾何布朗運動

$$dW(t)=(r(t)-\alpha)W(t)dt+\sigma W(t)dB_1(t)$$

$$\frac{dW(t)}{W(t)}=(r(t)-\alpha)dt+\sigma dB_1(t)$$

$$d\ln W(t)=[(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}]dt+\sigma dB_1(t)$$

$$d\ln W(t)=[(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}]dt+\sigma[\rho dB_2(t)+\sqrt{1-\rho^2}\,dZ(t)]$$

$$dB_1(t)=\rho dB_2(t)+\sqrt{1-\rho^2}\,dZ(t)$$

$$dr(t)=[\theta(t)-ar(t)]dt+\eta\, dB_2(t)$$

- 其中$Z(t)$與$B_2(t)$為互相獨立的布朗運動，ρ 為帳戶價值與利率變動的相關性。

正交化

- 帳戶價值與利率的隨機過程用矩陣表示：

$$\begin{bmatrix} d\ln W(t) \\ dr(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2} \\ \theta(t)-a\cdot r(t) \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dZ(t) \\ dB_2(t) \end{bmatrix}$$

- 求出 $\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$ 的反矩陣

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(\sqrt{1-\rho^2})\sigma\eta}\begin{bmatrix} \eta & -\rho\sigma \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} \frac{d\ln W(t)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{\rho dr(t)}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \frac{dr(t)}{\eta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \frac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta} \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dZ(t) \\ dB_2(t) \end{bmatrix}$$

$$X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\ln\frac{W(t)}{W(0)}}{\sigma}-\rho[\frac{r(t)-r(0)}{\eta}]\right) \qquad Y(t)=Y(0)+\frac{r(t)-r(0)}{\eta}$$

- 令$X(0)\equiv 0$、$Y(0)\equiv 0$ 、W(0)為帳戶的起始價值、r(0)為起始的短期利率，則

$$W(t)=W(0)\exp\left[\sigma\left(\sqrt{1-\rho^2}\cdot X(t)+\rho\cdot[Y(t)]\right)\right]$$

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \frac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta} \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dZ(t) \\ dB_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_Y(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix}$$

$$u_x(t) = \frac{(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$u_Y(t) = \frac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta}$$

θ(t)則能利用 $\hat{\theta}(t) = \frac{\alpha(t+1)-\alpha(t)}{\Delta t} + a\cdot\alpha(t+1)$ 估計之

其中α(t)為t時間點Hull-White利率樹的調整因子，a為均數復迴歸率。

- 求出兩獨立的新變數X(t)和Y(t)後
  - 分別建構出X(t)和Y(t)的樹狀結構，並加以結合和評價
  - 計算出GMWB隱含障礙選擇權的價值
- 其後再加上固定年金利用HW-tree的折現值
- 按照公平原則應該等於起始的躉繳保費
  - 推出公平費用率

公平費用率(α)

- 造樹過程

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(r(t)-\alpha)-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \frac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ(t) \\ dB_2(t) \end{bmatrix}$$

- α未知不能造樹 ➔先給定α 再調整
  - 計算後的障礙選擇權價值+固定年金 > 起始的躉繳保費
    - α調升
  - 計算後的障礙選擇權價值+固定年金 < 起始的躉繳保費
    - α調降

年金給付

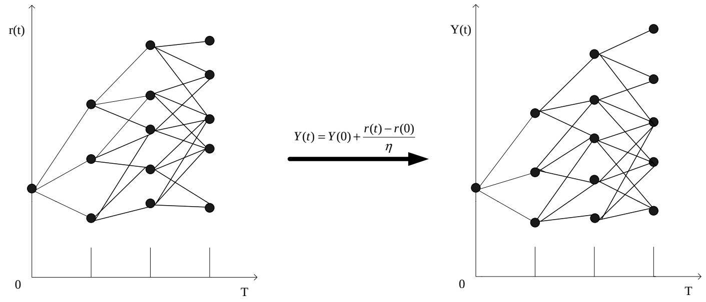
- 帳戶在提領時間點下降G的高度
  - 處理提領時間點的Jump
    - 將本來的格子點X(t)利用下列兩式轉換

$$X(t) = X(0) + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\frac{\ln\frac{W(t)}{W(0)}}{\sigma} - \rho(Y(t)) \right] \qquad X(0) \equiv 0$$

$$W(t) = W(0)\exp\left\{\sigma\left[\sqrt{1-\rho^2}\cdot X(t) + \rho\cdot(Y(t))\right]\right\}$$

    - X(t) ➔ W(t) ➔ W(t)-G ➔ X(t)
      (Jump)

Y(t)的樹狀結構



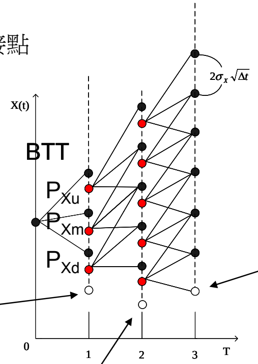
X(t)的樹狀結構

$$X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\ln\frac{W(t)}{W(0)}}{\sigma}-\rho\left[\frac{r(t)-r(0)}{\eta}\right]\right)$$

分別給定每一期不同的Y坐標下X的樹狀結構

爲了處理非線性誤差 使用BTT接點

紅色點：Jump後的點



第三期的default boundary

$$X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\ln(\frac{G}{W(0)})}{\sigma}-\rho\left[\frac{r(3)-r(0)}{\eta}\right]\right)$$

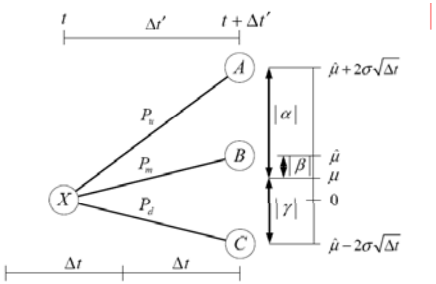
第一期的default boundary

$$X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\ln(\frac{G}{W(0)})}{\sigma}-\rho\left[\frac{r(1)-r(0)}{\eta}\right]\right)$$

第二期的default boundary

$$X(t)=X(0)+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\ln(\frac{G}{W(0)})}{\sigma}-\rho\left[\frac{r(2)-r(0)}{\eta}\right]\right)$$

The Trinomial Structure of BTT



By matching mean and variance and summing 3 probabilities to be one, we can solve P_u , P_m , and P_d .

$$P_u\alpha+P_m\beta+P_d\gamma=0$$

$$P_u\alpha^2+P_m\beta^2+P_d\gamma^2=Var$$

$$P_u+P_m+P_d=1$$

Construct the Trinomial Structure

Branch Probabilities are Valid!

$$\det=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)<0,$$

$$\det{}_u=(\beta\gamma+\mathrm{Var})(\gamma-\beta),$$

$$\det{}_m=(\alpha\gamma+\mathrm{Var})(\alpha-\gamma),$$

$$\det{}_d=(\alpha\beta+\mathrm{Var})(\beta-\alpha).$$

Thus, $P_u=\det_u/\det$, $P_m=\det_m/\det$, and $P_d=\det_d/\det$

Verify that $P_u, P_m, P_d>0$.

Construct the Trinomial Structure

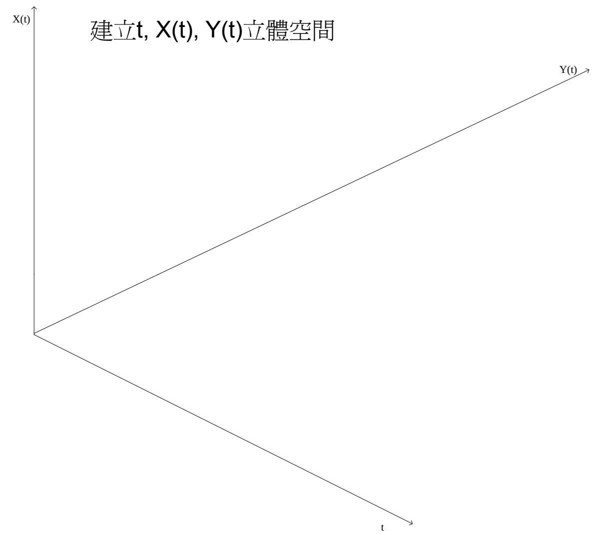
Branch Probabilities are Valid!

Show that det$_u$, det$_m$, and det$_d$ <0 instead.

$$
\begin{aligned}
\beta\gamma + \mathrm{Var}(\Delta t') &= \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t' \geq \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t = (\beta - \sigma\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0, \\
\alpha\gamma + \mathrm{Var}(\Delta t') &= \beta^2 - 4\sigma^2\Delta t + \sigma^2\Delta t' \leq \beta^2 - 4\sigma^2\Delta t + 2\sigma^2\Delta t = \beta^2 - 2\sigma^2\Delta t \leq 0, \\
\alpha\beta + \mathrm{Var}(\Delta t') &= \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t' \geq \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t = (\beta + \sigma\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

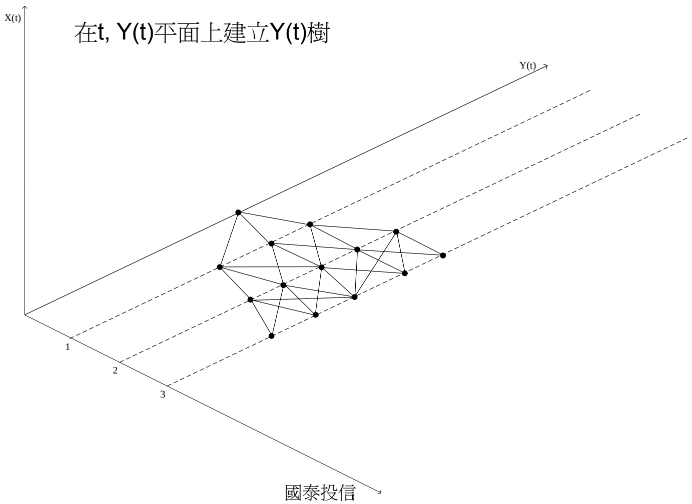
結合Y(t) & X(t)

建立t, X(t), Y(t)立體空間



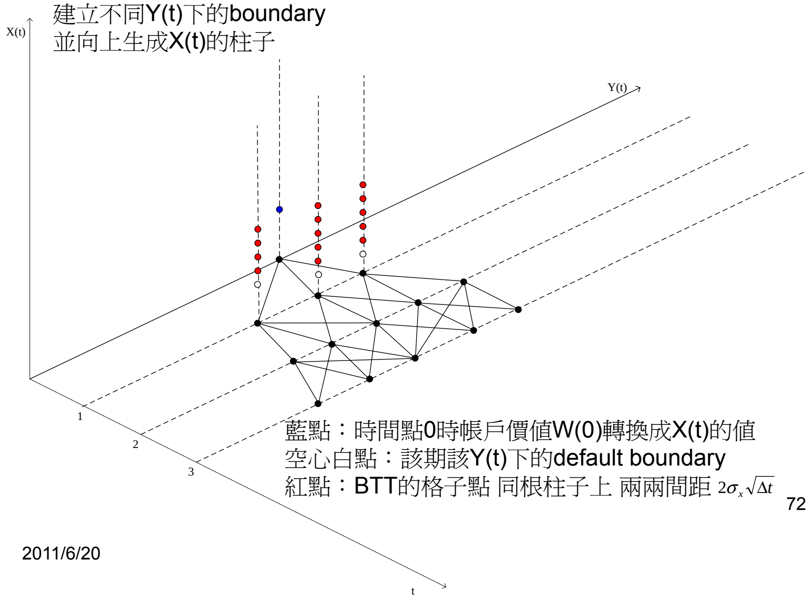
結合Y(t) & X(t)

在t, Y(t)平面上建立Y(t)樹



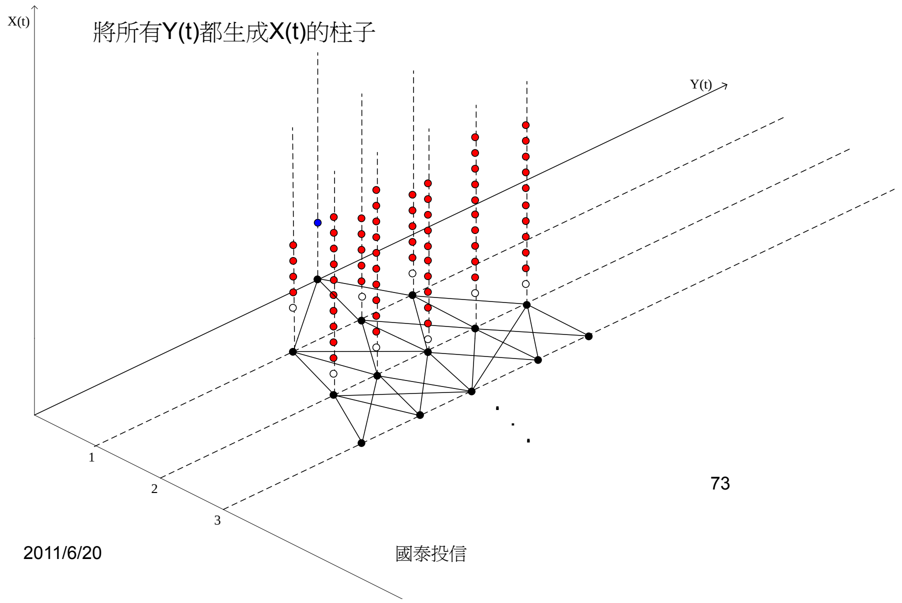
結合Y(t) & X(t)

建立不同Y(t)下的boundary
並向上生成X(t)的柱子

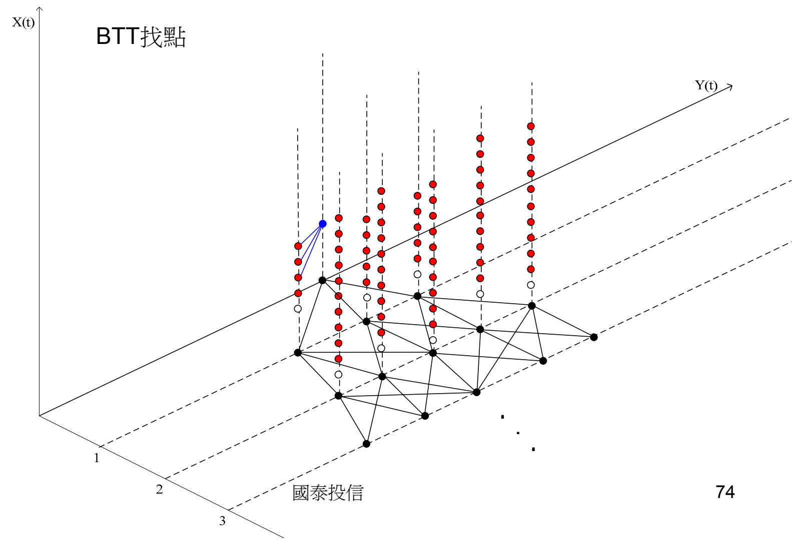


藍點：時間點0時帳戶價值W(0)轉換成X(t)的值
空心白點：該期該Y(t)下的default boundary
紅點：BTT的格子點 同根柱子上 兩兩間距 $2\sigma_x\sqrt{\Delta t}$

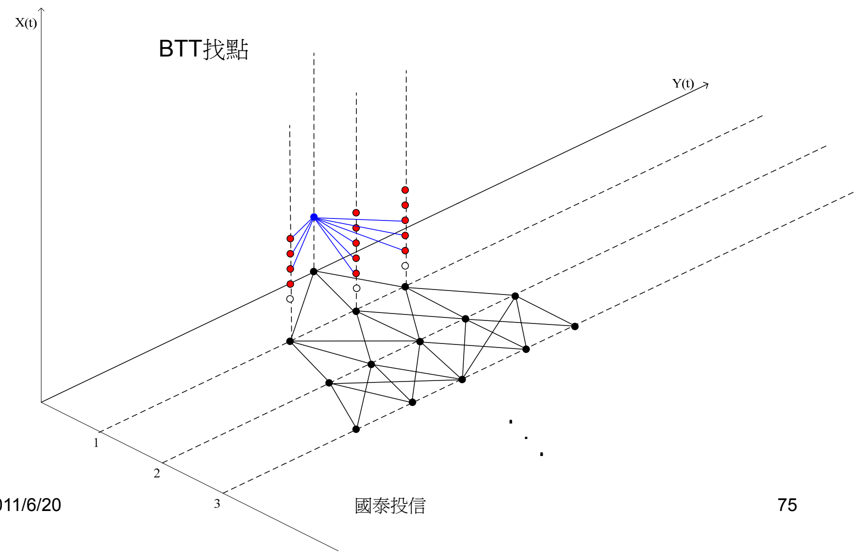
結合Y(t) & X(t)



結合Y(t) & X(t)

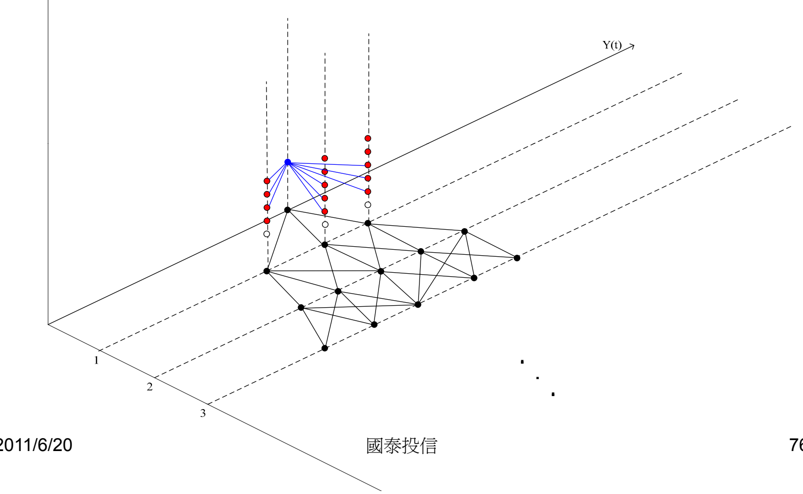


結合Y(t) & X(t)

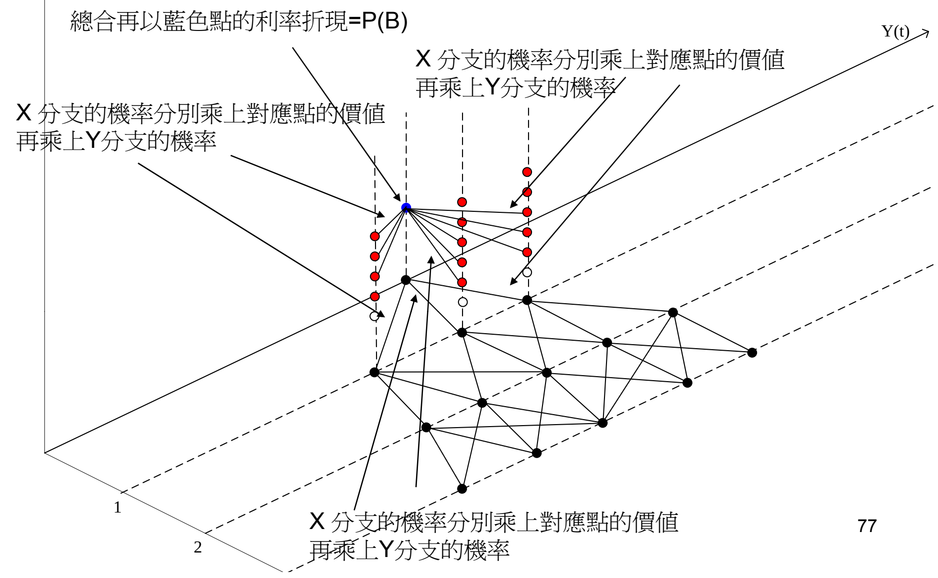


結合Y(t) & X(t)

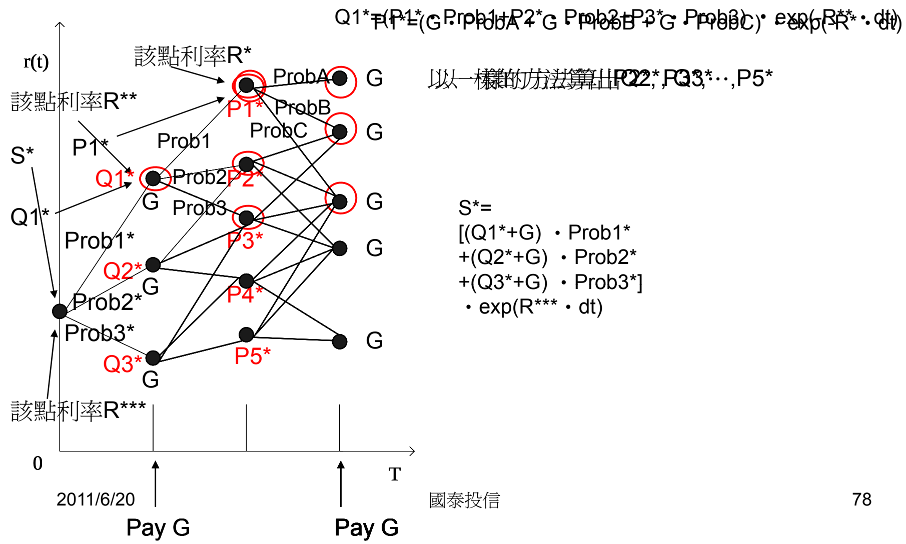
由於X(t)與Y(t)已正交化 所以聯合變動機率可由邊際機率相乘得到
利用backward induction 即可推出今日的帳戶價值



障礙選擇權的後推法

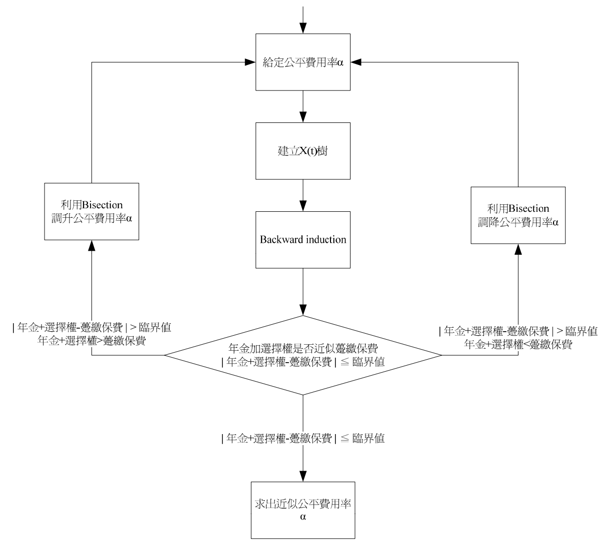


固定年金利用 Hull-White利率樹的折現



- 利用上述造樹過程以及後推法計算出隱含障礙選擇權的價值P(B)
- 其後再加上固定年金(G)利用Hull-White利率樹的折現值, S*
- 按照公平原則應該等於起始的躉繳保費
  – P(B)+S*=W(0)
- 借此來推出公平費用率(α)

調整流程



Questions and Answers