函式的撰寫及函式庫的引用

函式簡介
標準化函式
實例演練:連續複利下零息利率計算
使用者自訂函式
實例演練:自訂Min(a,b)
Black-Scholes Formula
實例演練: 使用put-call parity驗證BS-formula
實例演練: 障礙選擇權和 in-out parity
實例演練: 呼叫評價其他選擇權的函式
自建函式庫及函式庫的引用

函式簡介

- C++的函式

  C++模組所提供的標準化函數及函式庫的標題檔
  - printf stdio.h 列印字串
  - scanf stdio.h 讀取鍵盤輸入
  - pow(x,y) math.h 計算 x^y
  - 使用http://www.cplusplus.com/reference/ 尋找參數定義及範例程式

  – 使用者自行定義的函式
- 函式呼叫包含下列三個部分

財工數值程式常用的數值函式

- double fabs(double x) =>絕對值函式

傳回值型態爲 double　　傳入參數型態爲 double

- 函式呼叫:

```
double A=-1.0;
  double Result;
  Result=fabs(A);
```

- 其他常用數值函式 (included in math.h):
  - **double exp(double *x*):** e^x
  - double pow(double x, double y): x^y
  - double sqrt(double x): $\sqrt{x}$
  - **double log(double *x*):** $\ln x$
  - double log10(double *x*): $\log_{10} x$

範例程式

參見UseFun Project

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
void main()
{
  double A=-1.0,B=2,C=10;
  double Result;
  Result=fabs(A);   //絕對值函式
  printf("%f\n",Result);
  Result=exp(A);    //指數函式
  printf("%f\n",Result);
  Result=pow(B,B);   //Power function
  printf("%f\n",Result);
  Result=sqrt(B);  //開根號
  printf("%f\n",Result);
  Result=log(exp(B));  //對數函數=>底數爲 e
  printf("%f\n",Result);
  Result=log10(C);   //對數函數=>底數爲 10
  printf("%f\n",Result);
}
```

課堂練習

對$C^A \times C^B$取log

得 $A\log C + B\log C$

$\rightarrow C^A \times C^B = \exp(A\log C + B\log C)$

- 分別用C的運算式計算左右兩式
  - 令左式=Result, 右式=Result1
  - 使用 if(Result==Result1)… 來判斷此兩式是否相等
  - 請使用fabs()函式解決此問題

課堂練習

- 比較下列程式碼

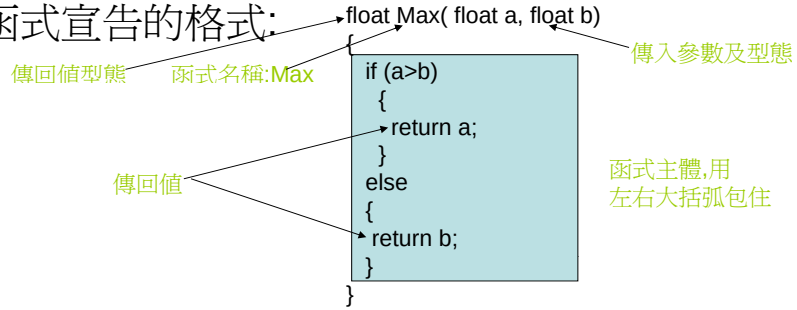
```
double a=pow(0.1,1000)*pow(0.1,-1000);.
printf("%lf",a);
```

```
double a=exp(1000*log(0.1)-1000*log(0.1));
printf("%lf",a);
```

兩者算出的答案相同嗎?

使用者定義的函式

- C++語言允許使用者自訂函式
  - main() 本身就是一個函式,程式執行時由系統呼叫main()
  - 其他的函式則經使用者的程式呼叫而執行
- 函式宣告的格式:



程式範例

```
#include <stdio.h>
float Max( float a, float b)
{
  if (a>b)
    {
      return a;
    }
  else
  {
   return b;
  }
}
void main()
{
 float a,b,c;
 scanf("%f",&a);
 scanf("%f",&b);
 c=Max(a,b);
 printf("%f和%f中較大的是%f",a,b,c);
 printf("%f和%f中較大的是%f\n",-a,-b,Max(-a,-b));
}
```

參見UserDefineFunction Project

Max函式

Remark:
函式必須在呼叫前宣告

呼叫Max函式

函數偵錯

```
#include <stdio.h>
float Max( float a, float b)
{
  if (a>b)
    {
      return a;
    }
  else
  {
   return b;
  }
}
void main()
{
 float a,b,c;
 scanf("%f",&a);
 scanf("%f",&b);
 c=Max(a,b);
 printf("%f和%f中較大的是%f",a,b,c);
 printf("%f和%f中較大的是%f\n",-a,-b,Max(-a,-b));
}
```

- F10 (不進入函式)
  - 執行到原函數的下一行
- F11 (逐步執行)
  - 跳入被呼叫的函數執行

課堂演練

- 撰寫 double logab(double a, double b)
  - 傳回 $\log_a b (= \frac{\ln b}{\ln a})$
  - 呼叫該函式

Scope Rules

- Local variables
  - Declared inside body of given function
  - Available only within that function
- Can have variables with same names declared in different functions
  - Scope is local: 'that function is it's scope'
- Global variables
  - Declared 'outside' function body
  - Global to all functions in that file

範例程式(See VarScope Project)

```
int a=2;   //  global variable
void f ()
 {
   int b=3;    //  Local to function f
   printf("%d",a);
}
int main(int argc, char *argv[]){
 printf("%d",b);  //illegal use
 int a=3;            // local to function main
 printf("%d",a);
return 0;
}
```

隨堂演練: 程式的輸出

See VarScope1 Project

```
int a=2;
void f(int b)
{
    double a=3;
    cout<<a+b<<endl;
}
int main(int argc, char *argv[]){
  cout<<a<<endl;
  for(int a=1;a<3;a++)
  {
     f(a);
  }
 return 0;
}
```

Variable Usage

- Local variables preferred
  - Maintain individual control over data
- Global variables?
  - Possible, but SELDOM-USED
  - Dangerous: no control over usage!

Black-Scholes Formula

- Black-Scholes Formula的買權評價公式可表示如下: $SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

  - 其中N(*)表標準常態分配的累積機率函數
- 需要用到的函式
  - 使用者自訂: N(*)
  - 系統提供: log(), sqrt(), exp()

程式範例

參見BSCall Project

Cumulative Normal Distribution

```
double Standard_Normal_Distribution(double d)
{
  int flag=0;   //Flag =1 if d<0
  if(d<0)
   {
    flag=1;
    d=fabs(d);
   }
  double rr=0.2316419;
  double a1=0.31938153;
  double a2=-0.356563782;
  double a3=1.781477937;
  double a4=-1.821255978;
  double a5=1.330274429;
  double k=1/(1+d*rr);
  double PI=3.14159265359;
  double value=1-exp(d*d/(-2))*
(a1*k+a2*pow(k,2)
            +a3*pow(k,3)+a4*pow(k,4)
          +a5*pow(k,5))/sqrt(2*PI);
  if(flag) return 1-value;
   else return value;
}
```

main function

```
 float S,r,T,X,V;
   printf("輸入股價:");
   scanf("%f",&S);
   printf("輸入利率:");
   scanf("%f",&r);
   printf("輸入到期日:");
   scanf("%f",&T);
   printf("輸入履約價:");
   scanf("%f",&X);
   printf("輸入波動率:");
   scanf("%f",&V);
   double b=1/exp(r*T);
   double d1=(log(S/(X*b))+V*V*T/2)/(V*sqrt(T));
   double d2=d1-V*sqrt(T);
   double Value=S*
Standard_Normal_Distribution(d1)
-X*b*Standard_Normal_Distribution(d2);
   printf("Call value=%f",Value);
```

課堂練習

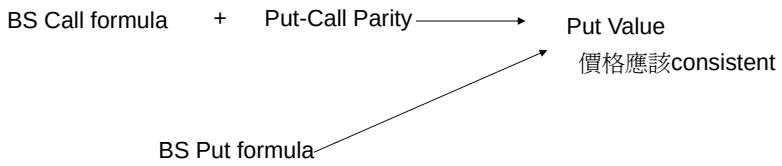
- 仿照上述程式,計算賣權的價值
  - 不要修改買權的程式碼,在 put-call parity會用到
- Remark:賣權價值: $Xe^{-rT}\mathrm{N}(-d_2)-SN(-d_1)$

使用Put-Call Parity評價賣權

- 考慮買權和賣權到期日的報酬:
  - 買權: $(S(T)-X)^+$ 賣權: $(X-S(T))^+$
- 如果買一個買權,賣一個賣權,到期日報酬
  - $(S(T)-X)^+-(X-S(T))^+=S(T)-X$
  - 其 報酬相當於期初借 Xe^{-rT} ,並購買標的物
- 在無套利的假定之下,假定C,P爲買權和賣權的價格,可得 $C-P=S-Xe^{-rT}$

課堂練習

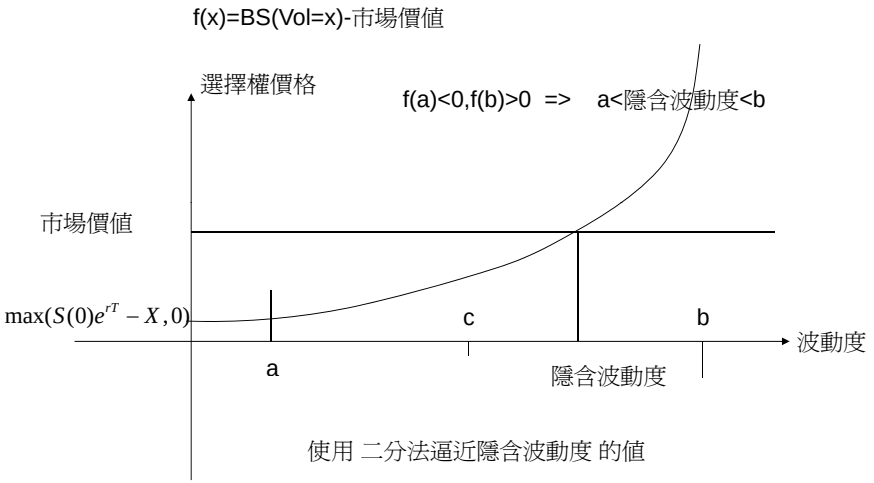
- 使用put-call parity來求算賣權的價值
- 比較使用Black-Scholes Formula和put-call parity計算出的賣權的價值
- 程式驗證:
  - 如何擔保程式碼以及概念推導過程正確



隱含波動度(Implied Volatility)

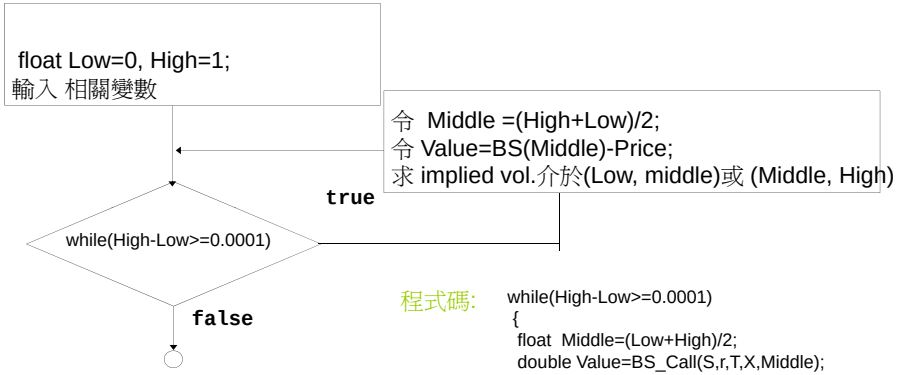
- 無法直接觀察股票的波動度(Volatility)
- 欲估計波動度
  - 歷史波動度(Historical volatility)
    - 不一定能夠忠實表達未來真實的波動度
  - 隱含波動度
    - 用市場上觀察到的選擇權價格，代入Black-Scholes Formula反求
    - 可使用二分法(Bisection method)估計

波動度和選擇權價格關係



使用 二分法逼近隱含波動度 的值

程式結構



請參見 ImpliedVol project

程式碼:

```
while(High-Low>=0.0001)
 {
  float  Middle=(Low+High)/2;
  double Value=BS_Call(S,r,T,X,Middle);
  Value=Value-Price;
  if(Value>0)
            { High=Middle;}
   else
            {Low=Middle;}
 }
```

課堂練習: 利用賣權價格逆推隱含波動度

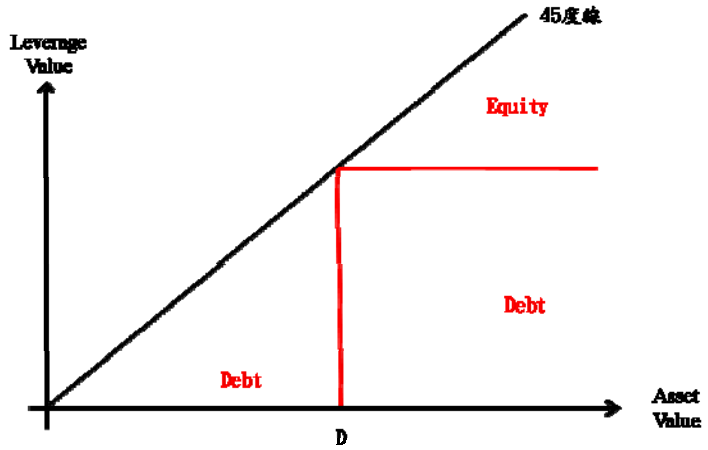
- 修改上述程式,用賣權價格倒推隱含波動度
- Hint:
  - 撰寫一函式 BS_Put(),用來求算賣權價格
  - 修改主程式

```
while(High-Low>=0.0001)
 {
  float  Middle=(Low+High)/2;
  double Value=BS_Put(S,r,T,X,Middle);
  Value=Value-Price;
  if(Value>0)
            { High=Middle;}
   else
            {Low=Middle;}
 }
```

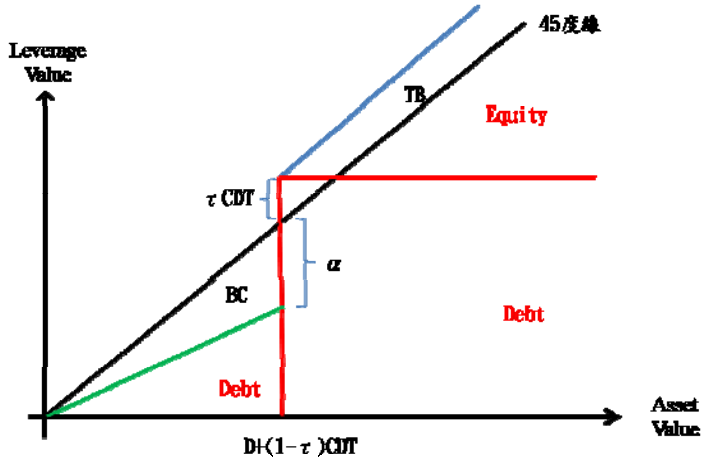
Homework:
The Structural Credit Risk Model

- 使用選擇權評價模型估算公司的信用風險
- 假定公司資產爲服從對數常態分配的標的物
- Equity can be treated as a call option on the firm's asset
- Debt value can be viewed as a contingent claim on the firm value
- See the next figure

Merton's Structural Credit Risk Model



Consider Tax Benefit (TB) and Bankruptcy Cost (BC)



VL=D+E=VA+TB-BC

障礙選擇權

- 選擇權的價格常會受標的物的價格路徑而影響,令障礙值=H
  - 下出局(Down-and-out) 買權:

$$\text{payoff} = \begin{cases} (S(T)-X)^+ & \text{if } S(t)>H \ \ \forall t\in(0,T) \\ 0 & \text{if } \exists t\in(0,T)\ S(t)\le H \end{cases}$$

  - 下入局(Down-and-in) 買權:

$$\text{payoff} = \begin{cases} 0 & \text{if } S(t)>H \ \ \forall t\in(0,T) \\ (S(T)-X)^+ & \text{if } \exists t\in(0,T)\ S(t)\le H \end{cases}$$

  - In-out parity:

    下入局買權+ 下出局買權= 標準買權

課堂演練:呼叫函數計算下入局買權的價值

- 下入局買權的價值 請參見 ExoticOption project

$$S(H/S)^{2\lambda}N(y) - Xe^{-rT}(H/S)^{2\lambda-2}N(y-\sigma\sqrt{T})$$

$$\lambda = \frac{r+\sigma^2/2}{\sigma^2} \qquad y = \frac{\ln\left(H^2/(SX)\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

prototype

```
double DownAndInCall (double S, double T, double X, double H, double r, double q, double Sigma)
{
  double OptionValue;
double lambda = (r-q+0.5*Sigma*Sigma)/(Sigma*Sigma);
  double y = log((H*H)/(S*X))/(Sigma*sqrt(T)) + lambda* Sigma*sqrt(T);
OptionValue = S * pow((H/S),2*lambda) * Standard_Normal_Distribution(y) / exp(q*T) –
 X * pow((H/S),(2*lambda-2)) * Standard_Normal_Distribution(y- Sigma*sqrt(T)) / exp(r*T) ;
 return OptionValue;
}
```

implementation

S: 股票價格, T: 距到期日的時間長度, X:履約價格, H: 障礙價格, r: 無風險利率, q: 股利率, Sigma:股價波動度

課堂演練:呼叫函數計算下入局買權的價值

- 呼叫DownAndInCall () 計算買權價值
  - S=100
  - X=100
  - T=1
  - r=0.1
  - Sigma=0.3
  - H=90
  - q=0

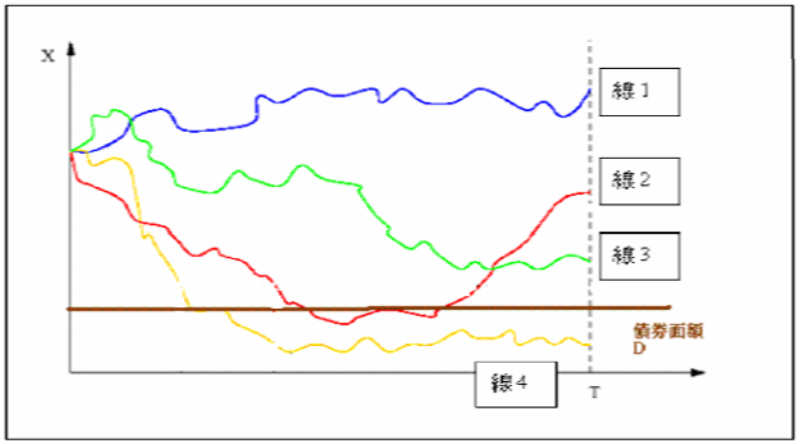
課堂練習

- 使用 in-out-parity和BS formula求 下出局買權的價格

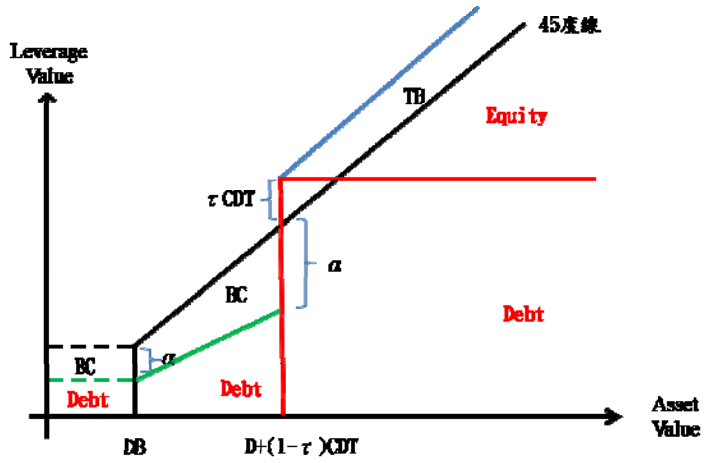
  下入局買權+ 下出局買權= 標準買權
- 撰寫函式 DownAndOutCall()
  - double DownAndOutCall(double S, double T, double X, double H, double r, double q, double Sigma)
  - 呼叫DownAndInCall () 和 BS_Call() 求下入局買權和標準買權的價值

Modeling the Credit Risk with Barrier Options

Equity can be viewed as a down-and-out call option under the "first-passage" model.



Homework: Evaluate the Equity/ Debt Value under the Black&Cox Model



評價新奇選擇權的函數

- 二維常態累積機率函數
- 遠期生效選擇權
- 複合選擇權
- 回顧型選擇權
- 後定選擇權
- 幾何亞式選擇權

二維常態累積機率函數

- double Two_Dimension_Normal(double a, double b, double rho)
- 假定兩個二維常態隨機變數x,y,相關係數=rho,本函數計算 x<=a, y<=b 的累積機率
- Ex: Two_Dimension_Normal(0,0,0)=0.25

//Check C++財務程式設計 5-2.3常態分配累積密度函式(p5-19)

遠期生效選擇權

- 假設未來約定的時間點爲t_1，到期日爲T

$$C = \max\{[S(T) - S(t_1)],0\}$$

double ForwardStartCall
(double S, double T_1, double T, double r, double q, double Sigma)

Example:
ForwardStartCall(100, 0.25, 1, 0.1, 0, 0.3)

複合選擇權

- 以選擇權爲標的物的選擇權，投資人在期初支付此選擇權的權利金，取得在未來某一時點以某一個價格購買(或賣出)另一個選擇權的權利。
  - 買權的買權(call on call)
  - 賣權的買權(call on put)
  - 買權的賣權(put on call)
  - 賣權的賣權(put on put)

複合選擇權

- 在T1時，持有人可以用X1來(買/賣)一選擇權
  - 該選擇權在T2之時，可選擇用X2買/賣標的資產。

```
double CallOnCall
(double S, double T_1, double T_2, double X_1, double X_2, double r,
double q, double Sigma)
double CallOnPut(…)
double PutOnCall(…)
double PutOnPut(…)
```

課堂練習

- 計算複合選擇權的價值
  - 標的物
    - S=100, Vol.=0.3, q=0
  - 買權:
    - 半年後可用10元的價格購買賣權
  - 賣權
    - 再隔半年後可用100元的價格出售標的物

回顧型選擇權

- 允許投資人在一段特定期間內賣在此間內股價的最高價(賣權)，或是此期間內的股價最低價買入(買權)

$$\max(S - S_{\min}, 0)$$

從選擇權開始日到到期日曾出現的最低價格

```
double LookbackCall
(double S, double T, double Smin, double r, double q, double Sigma)
```

從選擇權開始日到評價日曾出現的最低價格

後定選擇權

- 允許購買者能夠改變其心意，讓持有人可以在到期日前某一特定時間點t，在決定該商品是買權還是賣權
- 後定選擇權通常用於未來某段時間內，可能發生某些重大事件而影響標的物的價格，譬如公司合併、總統大選、國際事件等等。

```
double ChooserOption
(double S, double X, double T, double t, double r, double q, double Sigma)
```

幾何亞式選擇權

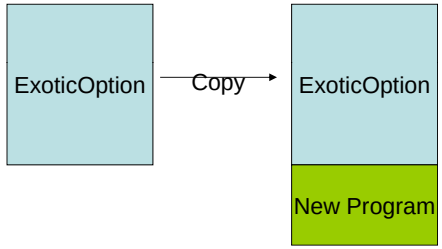
- 到期價值，取決於過去股價的平均

$$C = \max(\overline{S} - X, 0) \qquad \overline{S} = \sqrt[n]{S_1 \cdot S_2 \cdots S_n}$$

double GeometricCall(double S, double T, double X, double r, double Sigma)

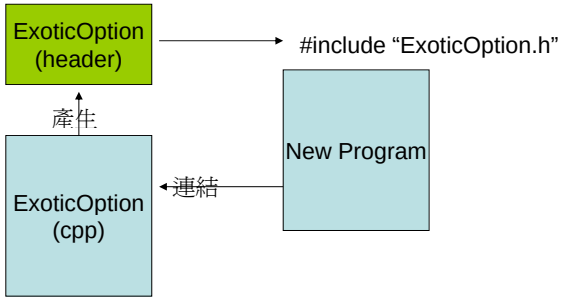
自建函式庫及函式庫的引用
Intuition

- ExoticOption project提供許多有用的函式
- 欲引用函式必須先定義



- 浪費空間而且降低程式的可讀性

自建函式庫及函式庫的引用
Intuition



自建函式庫及函式庫的引用
函式的宣告和定義

- 請比較下列程式碼 見 FunDeclaration project

```
void f()
{

}
int main(…) {
  f();
  return 0;
}
```

函式定義

```
void f();

int main(…)
{
  f();
  return 0;
}
void f()
{

}
```

函式宣告

```
int  main(…)
{
 f();
 return 0;
}
void f()
{

}
```

呼叫f()之前尚未宣告

程式可正確編譯

自建函式庫及函式庫的引用
函式的連結

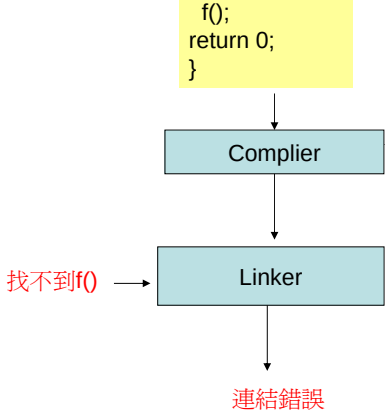
```
void f();

int main(…)
{
  f();
  return 0;
}
```

可編譯但無法連結
Compile Current File works!

```
void f();

int main(…)
{
  f();
return 0;
}
```



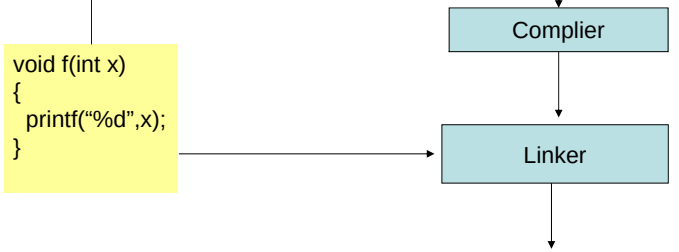
自建函式庫及函式庫的引用
建立函式庫並引用

檔名:f.h

```
void f(int x);
```

```
void f(int x)
{
  printf("%d",x);
}
```

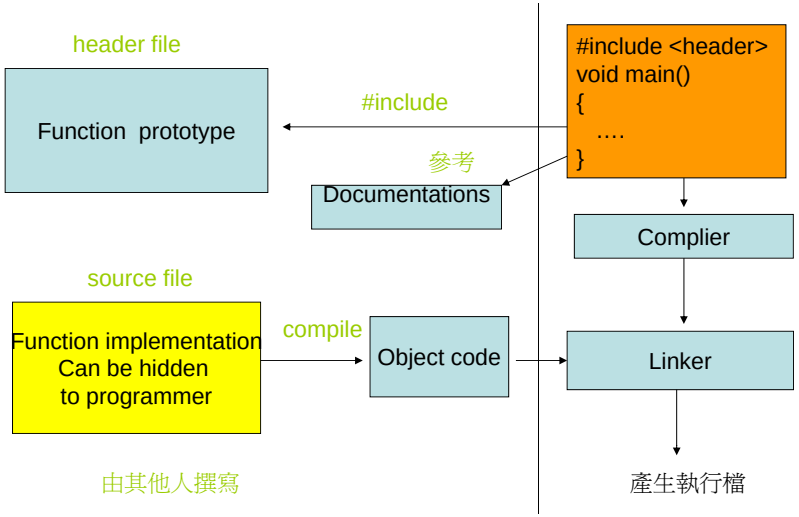
```
#include "f.h"
void main()
{
f(1);
}
```



請見SepComplication project

產生執行檔

引用他人撰寫的函式庫



課堂演練

- 請開啓WriteHeader project
  - WriteHeader.cpp 檔包含常態累積密度函數
  - 撰寫header file
- 另開啓main.cpp
  - include 該 header file
  - 撰寫 Black Scholes買權評價公式
  - 請參見 BSCall project